Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann
Daniel Henkel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/10 26.10.2009

Höhere Mathematik 1

2. Übung, Lösungsvorschlag

Gruppenübungen

Aufgabe G4

a)
$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

b) $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = 6.$
$\binom{5}{4} = \frac{5!}{4!\cdot 1!} = 5.$
$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!\cdot 3!} = 20.$

Aufgabe G5

a) $|x-1| \leq 3$ ist erfüllt, wenn $-3 \leq x-1 \leq 3$ gilt, was für $-2 \leq x \leq 4$ der Fall ist. $M_1 = [-2, 4]$.

b) $|x+2| = 2$ ist erfüllt, wenn $x+2 = 2$ oder $x+2 = -2$ gilt. Daher ist $M_2 = \{0, -4\}$.

c) Wir formen zunächst die Ungleichung um:

$$
\begin{aligned}
(x-2)^3 &\geq x^3 - \frac{90}{15}x^2 + x - 9 + 11x + \frac{1}{x} \\
x^3 - 6x^2 + 12x - 8 &\geq x^3 - 6x^2 + 12x - 9 + \frac{1}{x} \\
1 &\geq \frac{1}{x}
\end{aligned}
$$

Für negative Werte x ist diese Ungleichung immer erfüllt und für positive Werte muß $x \geq 1$ sein.

Die Menge aller Zahlen, die von 2 höchstens den Abstand 5 haben ist:

$$M = \{x \in \mathbb{R} : |x-2| \leq 5\} = \{x \in \mathbb{R} : -3 \leq x \leq 7\}.$$

Vor dem Doppelpunkt stehen in der Mengenklammer die Objekte, die potentiell in der Menge enthalten sind. Hinter der Klammer steht eine Aussonderungsbedingung, die für die Objekte erfüllt sein muß.

Aufgabe G6

a) $M_1 = [-2, 4]$ ist ein Intervall. M_2 und M_3 sind keine Intervalle.

b) $M_1 \cup M_2 = \{x \in \mathbb{R} : x = -4 \text{ oder } -2 \leq x \leq 4\}$.
$M_2 \cap M_3 = \{-4\}$.
$M_2 \setminus M_1 = \{-4\}$.

Hausübungen

Aufgabe H4 Sei $A(n)$ die Aussage: $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

i) Induktionsanfang: Für $A(0)$ ist $1 \geq 1$ wahr.

ii) Induktionsschritt: $A(n)$ ist wahr und damit

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n \\ &\geq (1+x)(1+nx) \\ &\geq 1+(n+1)x+nx^2 \\ &\geq 1+(n+1)x,\end{aligned}$$

da $nx^2 \geq 0$. Also folgt daß $A(n+1)$ auch wahr ist und damit $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe H5

a)

$$\begin{aligned}\binom{n+1}{k+1} &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} \\ &= \frac{n!(n+1)}{k!(k+1)(n-k)!} \\ &= \binom{n}{k}\frac{n+1}{k+1}.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\frac{(a+b)^n}{n!} &= \frac{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot a^k \cdot b^{n-k}}{n!} \\ &= \frac{\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot a^k \cdot b^{n-k}}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!}\cdot\frac{b^{n-k}}{(n-k)!}\end{aligned}$$

Aufgabe H6

a) $3 \leq |x-2| \leq 11$.
1. Fall $x - 2 > 0$: $\Rightarrow$
$|x-2| \geq 3 \Leftrightarrow x-2 \leq 3 \Leftrightarrow x \geq 5$.
$|x-2| \leq 11 \Leftrightarrow x-2 \leq 11 \Leftrightarrow x \leq 13$.
2. Fall $x - 2 \leq 0$: $\Rightarrow$
$|x-2| \geq 3 \Leftrightarrow -(x-2) \geq 3 \Leftrightarrow -x+2 \geq 3 \Leftrightarrow x \leq -1$.
$|x-2| \leq 11 \Leftrightarrow -(x-2) \leq 11 \Leftrightarrow -x+2 \leq 11 \Leftrightarrow x \geq -9$.
Insgesamt ergibt sich sich damit:

$$M_1 = \{x \in \mathbb{R} : -9 \leq x \leq -1 \text{ oder } 5 \leq x \leq 13\}.$$

b) $x^2 + 2x + 1 < 1 \Leftrightarrow (x+1)^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < x + 1 < 1 \Leftrightarrow -2 < x < 0$.
$M_2 =]-2, 0[$.

c)

$$\begin{aligned}
|x-2| &\leq \frac{|x|^2}{|x-2|} \\
|x-2|^2 &\leq |x|^2 \\
(x-2)^2 &\leq x^2 \\
x^2 - 4x + 4 &\leq x^2 \\
-4x &\leq -4 \\
x &\geq 1
\end{aligned}$$