Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann
Daniel Henkel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/10 19.10.2009

Höhere Mathematik 1

1. Übung, Lösungsvorschlag

Gruppenübungen

Aufgabe G1

a)

A_1	A_2	$A_1 \wedge A_2$	$\neg(A_1 \wedge A_2)$	$\neg A_1$	$\neg A_2$	$\neg A_1 \vee \neg A_2$
w	w	w	f	f	f	f
w	f	f	w	f	w	w
f	w	f	w	w	f	w
f	f	f	w	w	w	w

b)

A_1	A_2	$A_1 \vee A_2$	$\neg(A_1 \vee A_2)$	$\neg A_1$	$\neg A_2$	$\neg A_1 \wedge \neg A_2$
w	w	w	f	f	f	f
w	f	w	f	f	w	f
f	w	w	f	w	f	f
f	f	f	w	w	w	w

c)

A_1	A_2	A_3	$A_2 \Rightarrow A_3$	$A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow A_3)$	$A_1 \wedge A_2$	$(A_1 \wedge A_2) \Rightarrow A_3$
w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	f	f	w	f
w	f	w	w	w	f	w
w	f	f	w	w	f	w
f	w	w	w	w	f	w
f	w	f	f	w	f	w
f	f	w	w	w	f	w
f	f	f	w	w	f	w

Aufgabe G2

a) $1+3+5+7+9 = \sum_{i=0}^{4}(2i+1) = 25.$

b) $2+4+6+8+10 = \sum_{i=1}^{5} 2i = 30.$

c) $2+4+8+16 = \sum_{i=1}^{4} 2^i = 30.$

d) $\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}+2+\ldots+10 = \sum_{i=1}^{20} \frac{i}{2} = 105.$

e) $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots+\frac{1}{65536} = \sum_{i=0}^{8} \left(\frac{1}{4}\right)^i = \frac{87381}{65536}.$

f) $\underbrace{1-1+1-1+\ldots+1-1}_{\text{20 Summanden}} = \sum_{i=1}^{20}(-1)^{i-1} = 0.$

g) $2+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}+\ldots+\frac{2}{2187} = 2\cdot\sum_{i=0}^{7} \left(\frac{1}{3}\right)^i = \frac{6560}{2187}.$

Aufgabe G3
Induktionsanfang, $n = 1$.

$$\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 1 = 1^2.$$

Induktionsschritt, $n \to n+1$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) &= \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + (2(n+1)-1)\\ &= n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.\end{aligned}$$

Hausübungen

Aufgabe H1

a) $a \in B$ ist richtig wegen $A \subset B$.

b) $b \in A$ ist im Allgemeinen nicht richtig. Gegenbeispiel: $A = \{1\}, B = \{1,2\}, a = 1, b = 2$.

c) $a \subset B$ ist nicht richtig, weil a keine Menge sondern eine Zahl ist. Gegenbeispiel: $A = \{1\}, B = \{1,2\}, a = 1, b = 2$.

d) $A \in B$ ist nicht richtig, weil A keine Zahl sondern eine Menge ist. Gegenbeispiel: $A = \{1\}, B = \{1,2\}$.

e) $A \subset C$ ist richtig weil C Obermenge von A.

f) $C \setminus A \subset C \setminus B$ ist im Allgemeinen nicht richtig, denn für $A = \{1\}, B = \{1,2\}, C = \{1,2,3\}$ gilt $C \setminus A = \{2,3\}$, aber $C \setminus B = \{3\}$.

g) $C \setminus B \subset C \setminus A$ ist richtig, denn jedes Element aus $C \setminus B$ liegt nicht in B, also auch nicht in A. Somit muß es in $C \setminus A$ liegen.

h) $B = B \cap C$ ist richtig, weil B eine Teilmenge von C ist.

i) $C = B \cup C$ ist richtig, weil B eine Teilmenge von C ist.

j) $b \in C \setminus A$ ist im Allgemeinen nicht richtig. Gegenbeispiel: $A = \{1\}, B = \{1,2\}, C = \{1,2,3\}, b = 1$.

Aufgabe H2

a) Beweis: Sei n^4 für $n \in \mathbb{N}$ ungerade.
Annahme: n ist gerade. Dann gilt $n = 2k$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$. Demnach folgt $n^4 = (2k)^4 = 2(2^3k^4)$. Letzterer Ausdruck ist eine gerade Zahl. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist die Annahme falsch.
Damit folgt, n ist ungerade.

b) Beweis: Sei $n^3 + 1$ für $n \in \mathbb{N}$ gerade.
Annahme: n ist gerade. Dann können wir n schreiben als $n = 2k$ mit $k \in \mathbb{N}_0$. Damit folgt $n^3 + 1 = (2k)^3 + 1 = 2(2^2k^3) + 1$. Der letzte Ausdruck ist ungerade. Dies widerspricht der Voraussetzung. Also ist die Annahme falsch.

Aufgabe H3 Induktionsanfang, $n = 1$.

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 2}{6}.$$

Induktionsschritt, $n \to n+1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= \frac{n+1}{6}((2n+1)n + 6(n+1)) \\
&= \frac{n+1}{6}(2n^2+7n+6) = \frac{(n+1)(2n+3)(n+2)}{6}.
\end{aligned}$$