D Systeme von DGLn erster Ordnung

D.1 Vektorfunktionen

Sei $\vec{y} = \vec{y}(x)$ eine *Vektorfunktion*, d.h. Abbildung $\vec{y} : I \to \mathbb{R}^n$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y^{[1]}(x) \\ \vdots \\ y^{[n]}(x) \end{pmatrix}$$

Ableitung und Integration erfolgen komponentenweise

$$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} y^{[1]\,\prime}(x) \\ \vdots \\ y^{[n]\,\prime}(x) \end{pmatrix}, \qquad \int_a^b \vec{y}(x)\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} \int_a^b y^{[1]}(x)\mathrm{d}x \\ \vdots \\ \int_a^b y^{[n]}(x)\mathrm{d}x \end{pmatrix}$$

D.2 Systeme

Ein *System* von n DGLn erster Ordnung wird gegeben durch Abbildungen $f_i : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcl} y^{[1]\,\prime} & = & f^{[1]}(x, y^{[1]}, \ldots, y^{[n]}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y^{[n]\,\prime} & = & f^{[n]}(x, y^{[1]}, \ldots, y^{[n]}) \end{array}$$

in Kurzschreibweise mit $\vec{f} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$

$$\vec{y}\,' = \vec{f}(x, \vec{y})$$

Aus einer DGL $y'' = f(x, y, y')$ wird durch $y^{[1]} = y$, $y^{[2]} = y'$ das System

$$\begin{array}{rcl} y^{[1]\,\prime} & = & y^{[1]} \\ y^{[2]\,\prime} & = & f(x, y^{[1]}, y^{[2]}) \end{array}$$

D.3 Picard-Lindelöf

Satz D.1 Existenz und Eindeutigkeit. *Ist $\vec{f}(x, \vec{y})$ auf $I \times \mathbb{R}^n$ stetig und genügt einer Lipschitzbedingung*

$$\|\vec{f}(x, \vec{y}_1) - \vec{f}(x, \vec{y}_2)\| \leq L\|\vec{y}_1 - \vec{y}_2\|$$

(z.B. falls $\vec{f}$ nach den y_i stetig partiell differenzierbar ist) so hat das

$$AWP \quad \vec{y}\,' = \vec{f}(x, \vec{y}), \;\; \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$$

eine eindeutig bestimmte Lösung $\vec{y} : I \to \mathbb{R}^n$. Insbesondere besagt die Eindeutigkeit

Sind $\vec{y}_1$ und $\vec{y}_2$ Lösungen des Systems $\vec{y}\,' = \vec{f}(x, \vec{y})$ und gilt $\vec{y}_1(x_0) = \vec{y}_2(x_0)$ für ein $x_0 \in I$, so gilt $\vec{y}_1(x) = \vec{y}_2(x)$ für alle $x \in I$

Der Beweis ergibt sich wie für DGLn erster Ordnung.

D.4 Systeme linearer DGLn erster Ordnung

Sind die Funktionen f_i von der Form

$$f_i(x, y^{[1]}, \dots, y^{[n]}) = a_{i1}(x)y^{[1]} + \dots + a_{in}(x)y^{[n]} + b_i(x)$$

so spricht man von einem linearen System und kann es schreiben als

$$(*) \quad \vec{y}\,' = A(x)\vec{y} + \vec{b}(x) \quad \text{mit} \quad A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

Das zugehörige *homogene* System ist

$$(**) \quad \vec{y_h}\,' = A(x)\vec{y_h}$$

Wie bei den linearen DGLn. erster Ordnung zeigt man

Satz D.2 *Ist $\vec{y_s}$ eine (sog. spezielle) Lösung von $(*)$ so ist $\vec{y}$ eine Lösung von $(*)$ genau dann, wenn $\vec{y} = \vec{y_h} + \vec{y_s}$ mit einer Lösung $\vec{y_h}$ des homogenen Systems $(**)$.*

D.5 Fundamentalsystem von Lösungen

Lineare Algebra

- Vektorraum V: $\vec{v} + \vec{w}$, $\quad r\vec{v} \ (r \in \mathbb{R})$
- Linearkombination $\vec{v} = r_1\vec{v}_1 + \dots + r_n\vec{v}_n$
- $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ erzeugen V
  $\Leftrightarrow$ jedes $\vec{v} \in V$ ist Linearkombination
- $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ linear unabhängig
  $\Leftrightarrow \vec{0} = r_1\vec{v}_1 + \dots + r_n\vec{v}_n$ nur mit $r_1 = \dots = r_n = 0$
- $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ Basis von V
  $\Leftrightarrow$ linear unabhängig und erzeugend

- Ist V von endlich vielen Vektoren erzeugt, so hat V eine Basis
- Je zwei Basen von V haben dieselbe Elementanzahl $n = \dim V$
- Ist $n = \dim V < \infty$, so sind für $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in V$ äquivalent
  - $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ ist Basis von V
  - $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ sind unabhängig
  - $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ erzeugen V
  - Jedes $\vec{v} \in V$ hat eindeutige Darstellung
    $\vec{v} = r_1\vec{v}_1 + \dots + r_n\vec{v}_n$

- $\dim \mathbb{R}^n = n$

Ein *Linearkombination* von Vektorfunktionen $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_m$ mit $\vec{y}_j : I \to \mathbb{R}^n$ ist von der Form

$$\vec{y} = c_1\vec{y}_1(x) + \ldots + c_m\vec{y}_m(x) \quad \text{für alle } x \in I$$

mit Konstanten $c_1, \ldots, c_m$ in $\mathbb{R}$. Es gilt

- Jede Linearkomination von Lösungen des homogenen Systems $(**)$ ist ebenfalls Lösung von $(**)$.

In der Tat

$$\vec{y}\,' = c_1\vec{y}_1{}' + \ldots + c_m\vec{y}_m{}' = c_1A\vec{y}_1 + \ldots + c_mA\vec{y}_m = A(c_1\vec{y}_1 + \ldots + c_m\vec{y}_m) = A\vec{y}$$

Somit bilden die Lösungen von $(**)$ einen reellen Vektorraum V und es stellt sich die Frage nach den Basen dieses Vektorraums. Hier sind $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_m$ *linear abhängig* genau dann, wenn es $c_1, \ldots, c_m$ gibt, die nicht alle $= 0$ sind, sodass $c_1\vec{y}_1(x) + \ldots + c_m\vec{y}_m(x) = \vec{0}$ für alle $x \in I$. Andernfalls sind sie *linear unabhängig*. Eine Basis von V, auch *Fundamentalsystem* von Lösungen von $(**)$, besteht aus m unabhängigen Lösungen $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_m$ so, dass jede andere Lösung eine Linearkombination von diesen ist.

Satz D.3 *Zu jedem homogenen System $(**)$ von n linearen DGLn erster Ordnung gibt es ein Fundamentalsystem $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n$ und jedes Fundamentalsystem besteht aus n Lösungen. Für Lösungen $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n$ von $(**)$ sind die folgenden Aussagen äquivalent*

(1) $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n$ bilden ein Fundamentalsystem

(2) Es gibt $x_0 \in I$ so, dass die Vektoren $\vec{y}_1(x_0), \ldots, \vec{y}_n(x_0)$ in $\mathbb{R}^n$ linear unabhängig sind

(2') Es gibt $x_0 \in I$ so, dass $\det(\vec{y}_1(x_0), \ldots, \vec{y}_n(x_0) \neq 0$

(3) Für alle $x_0 \in I$ sind die Vektoren $\vec{y}_1(x_0), \ldots, \vec{y}_n(x_0)$ in $\mathbb{R}^n$ linear unabhängig

(3') Für alle $x_0 \in I$ gilt $\det(\vec{y}_1(x_0), \ldots, \vec{y}_n(x_0) \neq 0$

(4) Jede Lösung $\vec{y}$ von $(**)$ ist Linearkombination der $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n$

Beweis. Ist I ein kompaktes Intervall, so können wir den Satz von Picard-Lindelöf anwenden

$$\|A(x)\vec{y}_1 - A(x)\vec{y}_2\| = \|A(x)(\vec{y}_1 - \vec{y}_2)\| \leq L\|\vec{y}_1 - \vec{y}_2\|$$

mit $L = \max\{|a_{ij}(x)| \mid i, j \leq n,\ x \in I\}$. Andererseits können wir zu jedem x_0 und n unabhängigen Vektoren $\vec{y}_{10}, \ldots, \vec{y}_{n0}$ in $\mathbb{R}^n$ diese als Anfangswerte vorgeben und erhalten somit n unabhängige Lösungen $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n$: $\vec{y}_j$ ist die Lösung des

$$AWP \quad \vec{y}' = A(x)\vec{y},\ \ \vec{y}(x_0) = \vec{y}_{j0}$$

Ist $\vec{y}$ nun eine weitere Lösung von $(**)$, so gibt es Konstanten $c_1, \ldots, c_n$ in $\mathbb{R}$ mit

$$\vec{y}(x_0) = c_1\vec{y}_{10} + \ldots + c_n\vec{y}_{n0} = c_1\vec{y}_1(x_0) + \ldots + c_n\vec{y}_n(x_0)$$

da ja $\vec{y}_{10}, \ldots, \vec{y}_{n0}$ Basis von $\mathbb{R}^n$ ist. Aus der Eindeutigkeit folgt

$$\vec{y}(x) = c_1\vec{y}_1(x) + \ldots + c_n\vec{y}_n(x) \qquad \text{für alle } x$$

Das beweist auch, dass (1) aus (2) folgt. Ebenfalls aus der Eindeutigkeit folgt sofort

- Sind die $\vec{y}_j$ Lösungen von (**) und $\vec{y}(x_0) = c_1\vec{y}_1(x_0) + \ldots + c_m\vec{y}_m(x_0)$ für ein $x_0 \in I$ so gilt $\vec{y}(x) = c_1\vec{y}_1(x) + \ldots + c_m\vec{y}_m(x)$ für alle $x \in I$.

Also folgt (2) aus (2). Dass (2) und (2') sowie (3) und (3') äquivalent sind, weiss man aus Mathematik II, Lineare Algebra. Ebenso, dass alle Basen dieselbe Elementanzahl n haben und dass dann n Vektoren, die den Raum aufspannen, immer schon eine Basis bilden. □

D.6 Lineare DGL n-ter Ordnung

Eine lineare DGL n-ter Ordnung ist von der Form

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \ldots + a_n(x)y^{(n)} = b(x)$$

Diese übersetzen wir in ein System vermöge

$$y^{[1]} = y,\ y^{[2]} = y',\ \ldots, y^{[n]} = y^{(n-1)}$$

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_0(x)}{a_n(x)} & -\frac{a_1(x)}{a_n(x)} & & \ldots & -\frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)} \end{pmatrix} \vec{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{b(x)}{a_n(x)} \end{pmatrix}$$

Damit können wir (für $a_n(x) \neq 0$) die Ergebnisse über lineare Systeme erster Ordnung anwenden. Dem homogenen System entspricht dabei die homogene DGL

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \ldots + a_n(x)y^{(n)} = 0$$

Für n Lösungen $y_1, \ldots, y_n$ dieser homogenen DGL bilden wir entsprechend (2') und (3') des Satzes die *Wronski-Matrix*

$$W(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \vdots & & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

$\det W(x)$ heisst auch *Wronski-Determinante*. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent

(i) $y_1, \ldots, y_n$ ist ein Fundamentalystem

(ii) $\det W(x_0) \neq 0$ für ein $x_0 \in I$

(iii) $\det W(x) \neq 0$ für alle $x \in I$

(iv) Jede Lösung y der homogenen DGL ist Linearkombination der $y_1, \ldots, y_n$

Insbesondere ist die Existenz mindestens eines Fundamentalystems $y_1, \ldots, y_n$ gesichert und die Lösungen der inhomogenen DGL ergeben sich aus einer speziellen Lösung y_s als

$$y = c_1y_1 + \ldots c_ny_n + y_s$$