Satz von Picard-Lindelöf

Satz 0.1 *$f(x,y)$ sei stetig auf dem Streifen $S = \{(x,y) \mid x \in [x_0 - b,\, x_0 + a]\}$ und genüge dort der Lipschitzbedingung*

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

Dann hat das AWP $y' = f(x,y),\ y_0 = y(x_0)$ eine eindeutig bestimmte Lösung $y : [x_0 - b,\, x_0 + x] \to \mathbb{R}$.

Integralgleichung. Das AWP ist äquivalent zu

$$(*) \quad y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\, y(t))\mathrm{d}t$$

In der Tat, nach dem Hauptsatz

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} y'\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x} f(t,\, y(t))\mathrm{d}$$

Umgekehrt ist das Integral als Funktion der oberen Grenze differenzierbar und es gilt

$$\frac{\partial}{\partial x}(y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\, y(t))\mathrm{d}t) = f(x, y(x))$$

Picard-Iteration. Näherungslösungen der Integralgleichung $(*)$ werden durch Iteration bestimmt

$$y_{[0]}(x) = y_0, \quad y_{[n+1]}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\, y_{[n]}(t))\mathrm{d}t$$

Das können wir auch so notieren

$$y_{[0]} = y_0, \;\; y_{[n+1]} = T(y_{[n]})$$

mit dem Operator

$$T(y) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\, y(t))\mathrm{d}t$$

Dass y eine Lösung der Integralgleichung $(*)$ ist, bedeutet dann gerade, dass y ein *Fixpunkt* von T ist

$$T(y) = y$$

Beispiel: $y' = y,\ y(0) = 1$

$$y_{[0]} = 1,\ y_{[n]} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k$$

$$y_{[n+1]} = 1 + \int_{x_0}^{x} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!}x^k$$

Die Lösung von $(*)$ wird dann als Limes der Näherungen bestimmt

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_{[n]}(x)$$

im Beispiel also $y(x) = e^x$.

Banachscher Fixpunktsatz. Wir beschreiben zunächst ein analoges Vorgehen für eine Abbildung $T : G \to G$, wobei $G \subseteq \mathbb{R}^n$, z.B. $n = 2$, abgeschlossen. Wir setzen voraus, dass T *kontrahierend* ist, d.h. es gibt Konstante $K < 1$ mit

$$\|T(x) - T(x')\| \leq K\|x - x'\| \quad \text{für alle } x, x' \in G$$

Insbesondere ist T Lipschitz-stetig. Wir behaupten nun

- Es gibt ein eindeutig bestimmtes $x_\infty \in G$ mit $T(x_\infty) = x_\infty$ (Fixpunkt) und für jedes $x_0 \in G$ konvergiert die rekursiv definierte Folge $x_{n+1} = T(x_n)$ gegen x_∞.

Beweis. Die x_n bilden eine Cauchy-Folge, da für $n < m$

$$\|x_n - x_m\| \leq \sum_{k=n}^{m-1} \|x_k - x_{k+1}\| \leq \sum_{k=n}^{m} K^k \|x_0 - x_1\| \to 0 \text{ für } n \to \infty$$

wie man von der geometrischen Reihe weiss. Also gibt es

$$x_\infty = \lim_{n\to\infty} x_n$$

und wegen der Stetigkeit folgt

$$T(x_\infty) = x_\infty$$

Ist nun auch $T(x) = x$, so

$$\{x - x_\infty\| = \|T(x) - T(x_\infty)\| \leq K\|x - x_\infty\|$$

also $x = x_\infty$ da $K < 1$. $\square$

Wir betrachten nun den Funktionenraum

$$G = \{y \mid y : [x_0,\, x_0 + a] \to \mathbb{R} \text{ stetig } \}$$

mit dem Abstand

$$\|y_1 - y_2\| = \max\{|y_1(x) - y_2(x)| \ \mid x \in [x_0,\, x_0 + a]\}$$

Der obige Beweis gilt hier ganz entsprechend:

$$y_\infty = \lim_{n\to\infty} y_n$$

bedeutet hier, dass die Funktionenfolge y_n *gleichmäßig* gegen die Funktion y konvergiert. Inbesondere gibt es zu jeder Cauchy-Folge y_n eine stetige Funktion y, die der eindeutig bestimmte Limes dieser Folge ist. Der Fixpunktsatz und sein Beweis übertragen sich Wort für Wort.

Beim Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf setzen wir nun voraus, dass $aL = K < 1$ - indem wir das Intervall passend einschränken - und zeigen, dass der Operator T kontrahierend ist

$$\|T(y_1) - T(y_2)\| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t,\, y_1(t) - f(t,\, y_2(t)|\mathrm{d}t \leq \int_{x_0}^{x} L|y_1(t) - y_2(t)|\mathrm{d}t$$

$$\leq \int_{x_0}^{x} L\|y_1 - y_2\|| \mathrm{d}t \leq aL\|y_1 - y_2\| = K\|y_1 - y_2\|$$

Damit können wir den Fixpunktsatz anwenden, d.h. es gibt ein eindeutig bestimmtes y_∞ mit

$$T(y_\infty) = y_\infty$$

das bedeutet aber dasselbe, wie die Lösung der Intergralgleichung $(*)$ und damit des gegebenen AWPs.

Für beliebiges a zerlegen wir $[x_0,\, x_0 + a]$ in Teilintervalle $[x_k, x_{k+1}]$, auf die wir obigen Beweis anwenden können (d.h. $(x_{k+1} - x_k)L < 1$) und lösen iterativ die AWPe

$$\mathrm{AWP}_k: \quad y' = f(x, y),\ y(x_k) = u_k,\ \ y : [x_k,\, x_{k+1}] \to \mathbb{R}$$

wobei $u_0 = y_0$ und $u_k = y(x_k)$ für die Lösung y des AWP_{k-1}. Ensprechend verfahren wir für $[x_0 - b,\, x_0]$. Setzt man die Lösungen zusammen, so erhält man die Iterationsfolge der Näherungsösungen nach Picard

$$y_{[0]}(x) = y_0, \quad y_{[n+1]}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\, y_{[n]}(t))\mathrm{d}t, \quad x \in [x_0 - b,\, x_0 + a]$$

und die Lösung des AWP

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_{[n]}(x), \quad x \in [x_0 - b,\, x_0 + a]$$

Ein Problem besteht jedoch darin, die Integrale zu bestimmen.