26.1

$f(x)$ 2π-periodisch

Approximation durch

trigonometrisches Polynom

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Darstellung durch

Fourier-Reihe

$$f(x) \stackrel{?}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

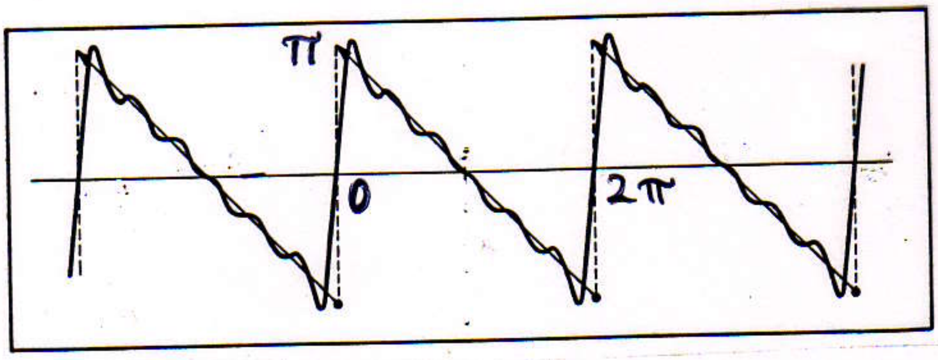
Beisp. 26.3.4

Sägezahn $f(x) = \pi - (x - 2k\pi)$

$$2k\pi \le x < 2(k+1)\pi$$

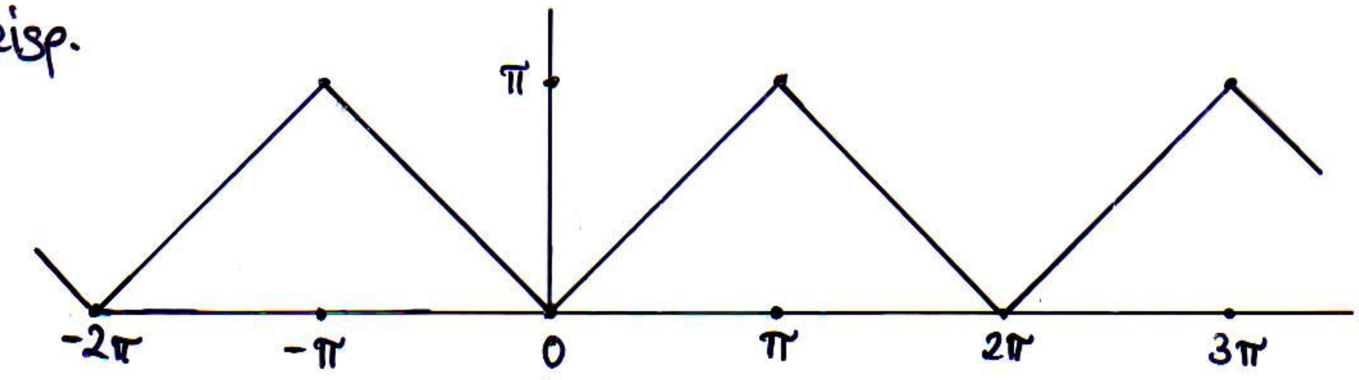
$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \sin nx$$

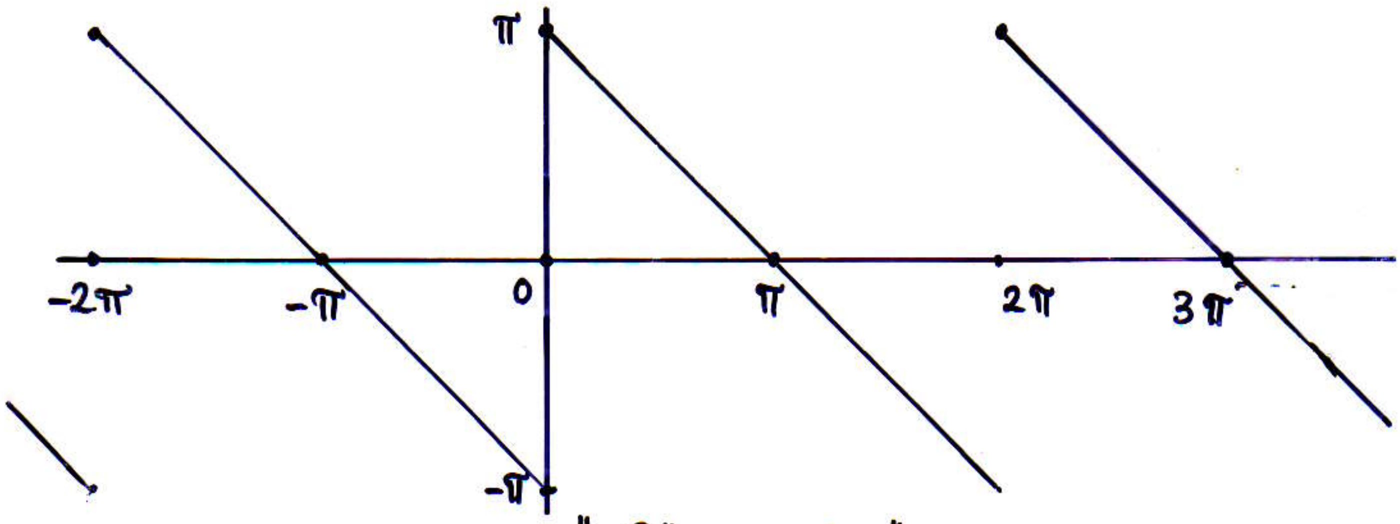
N=6



$f(x)$ T-periodisch : $f(x+T) = f(x)$

Beisp.





"Sägezahn"

26.3.3

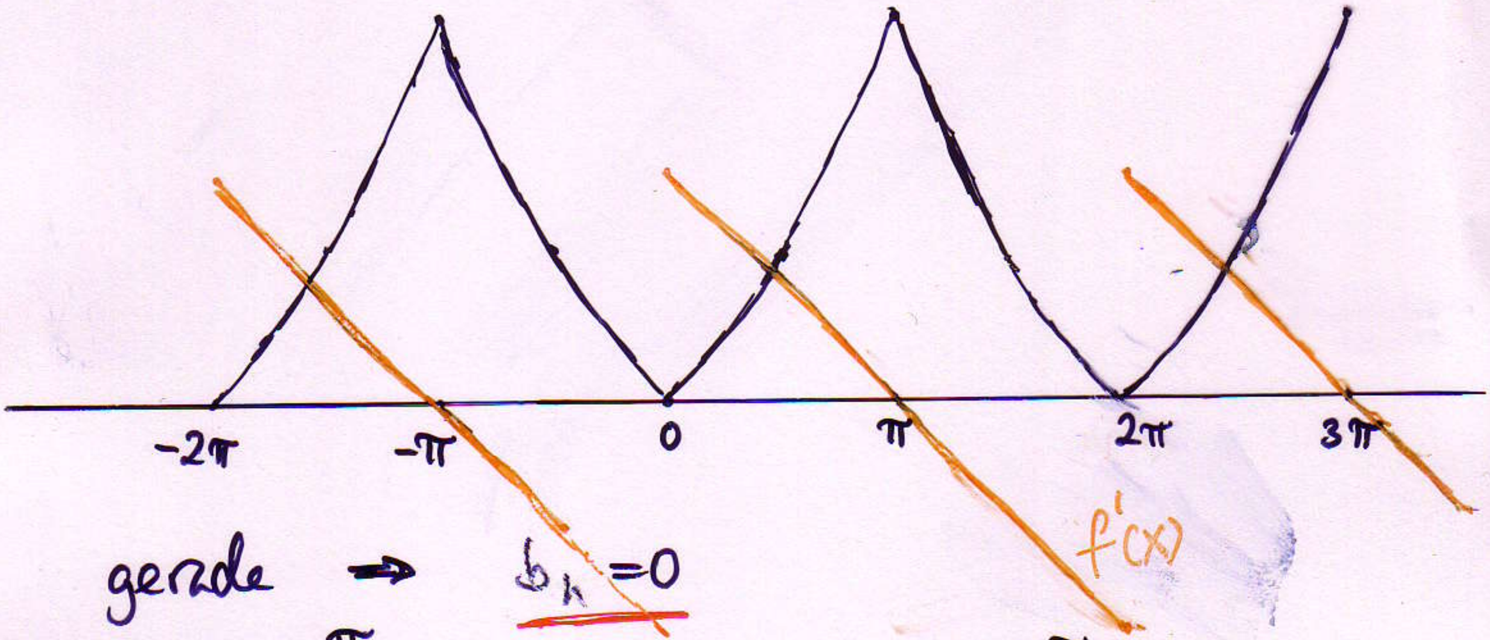
Bem. 1. $\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx$

2. f gerade: $f(-x)=f(x) \Rightarrow \int_0^T f(x)\,dx = 2\int_0^{T/2} f(x)\,dx$

3. f ungerade: $f(-x)=-f(x) \Rightarrow \int_0^T f(x)\,dx = 0$

Beisp. 3 $f(x) = \pi|x| - \frac{1}{2}x^2 \qquad -\pi \le x < \pi$

2π-periodisch



gerade $\Rightarrow$ $\underline{b_n = 0}$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2}\pi x^2 - \frac{1}{6}x^3\right]_0^\pi = \underline{\frac{2}{3}\pi^2}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{n^2}\cos nx + \frac{\pi}{n}\sin nx - \frac{x}{n^2}\cos nx - \left(\frac{x^2}{2n} - \frac{1}{n^3}\right)\sin nx\right]_0^\pi$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{n^2}(-1)^n + 0 - \frac{\pi}{n^2}(-1)^n - 0 - \frac{\pi}{n^2} + 0 - 0 - 0\right)$$

$$= \underline{-\frac{2}{n^2}}$$

Definition 5.1 26.2.2

Sei $f(x)$ auf $[0,2\pi]$ def. und integrierbar

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx \qquad n=0,1,..$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx \qquad n=1,2,...$$

Fourier-Koeffizienten

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n \sin nx)$$

Fourier-Reihe von $f(x)$.

Bem. $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$

f gerade $\Rightarrow$ $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad n=0,1..$

$b_n = 0 \qquad n=1,2,..$

f ungerade $\Rightarrow$ $a_n = 0 \quad n=0,1,...$

$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad n=1,2,..$

23.3.1

Satz 5.1

26.2

Wie findet man eine Fourier-Reihe?

Konvergiert die Fourier-Reihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

auf $[0, 2\pi]$ gleichmäßig gegen $f(x)$

so

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx \qquad n = 0, 1, 2$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Bew. Gliedweise Integration und Orthonormalitätsbeziehungen

$m, n = 1, 2, \ldots$

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cdot \cos nx \, dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \cdot \sin nx \, dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \sin nx \, dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \, dx = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cos nx = 0 \qquad \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \sin nx = 0$$

$$\frac{1}{2}, \cos x, \cos 2x, \ldots, \sin x, \sin 2x, \ldots$$

orthogonal und normiert auf π

Wie zeigt man, daß $f(x)$ Summe seiner Fourier-Reihe ist?

26.41

Satz 5.2 26.3 Sind f und g stetige 2π-periodische Fktn. mit denselben Fourier-Koeffizienten, so $f(x) = g(x)$ für alle x

Anwendung: 26.4 Ist $f(x)$ stetig, 2π-period. u. konvergiert seine Fourier-Reihe auf $[0, 2\pi]$ gleichmäßig, so konvergiert sie gegen $f(x)$

vgl. 1. Beispiel

Bew. Sei $g(x)$ die Summe der Fourier-Reihe. Dann $g(x)$ stetig und nach Satz 5.1 haben $f(x)$ und $g(x)$ dieselben Fourier-koeffizienten.

Bew. Satz 5.2: Zu zeigen

f 2π-per. stetig, alle Fourier-Koeff $= 0$

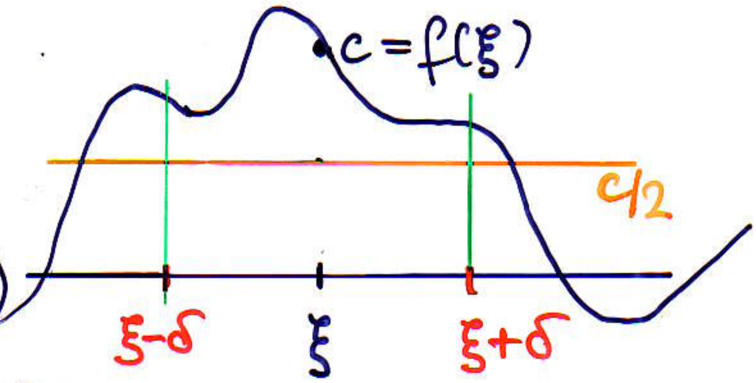
$\Longrightarrow f \equiv 0$.

Ang. $f \not\equiv 0$, $f(\xi) \neq 0$ für ein $\xi \in (0, 2\pi)$

OBdA $f(\xi) = c > 0$.

Es gibt $\delta > 0$ mit

$f(x) > \frac{c}{2}$ $x \in (\xi - \delta, \xi + \delta)$



$0 < \xi - \delta < \xi + \delta < 2\pi$.

$T_m(x) := (1 + \cos(x - \xi) - \cos\delta)^m$

trigonometr. Polynom $\Longrightarrow \int_0^{2\pi} f(x) T_m(x)\, dx = 0$

$I_1 = \int_0^{\xi - \delta_1} f(x) T_m(x)\, dx$

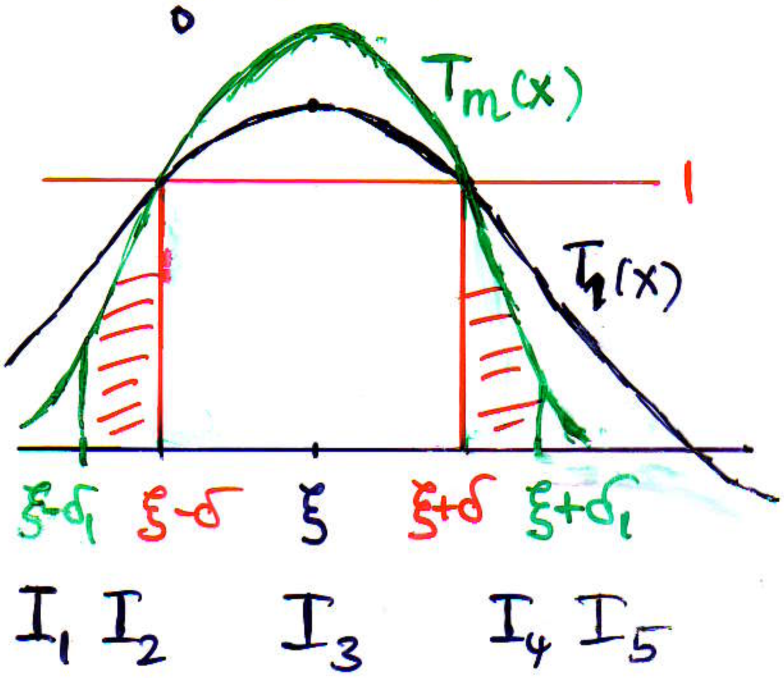
etc

$|I_2| + |I_4| < \frac{c\delta}{2}$

$\delta_1 \to \delta$

$|I_1| + |I_5| < \frac{c\delta}{2}$

$m \to \infty$



$I_3 > c\delta$ $\Longrightarrow I_1 + \dots + I_5 > 0$ ↯

vgl. P. Gröbner, W. Lesky Math. Meth. d. Physik I - S. 48

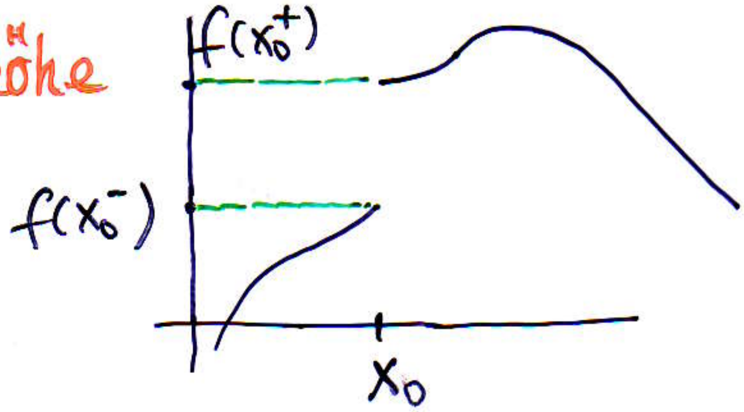
26.4.2

x_0 **Sprungstelle** von $f(x)$, falls

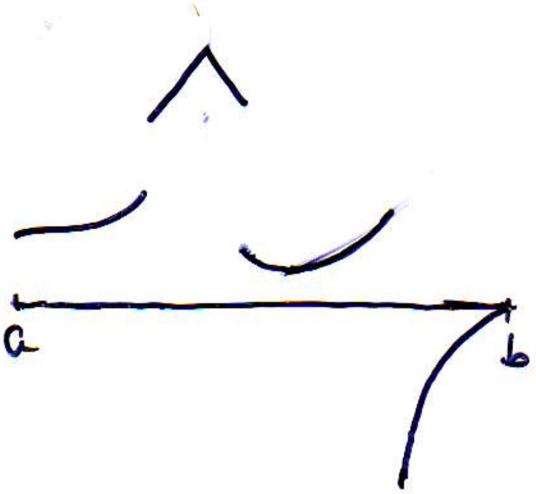
$f(x_0^+) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ und $f(x_0^-) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$

existieren

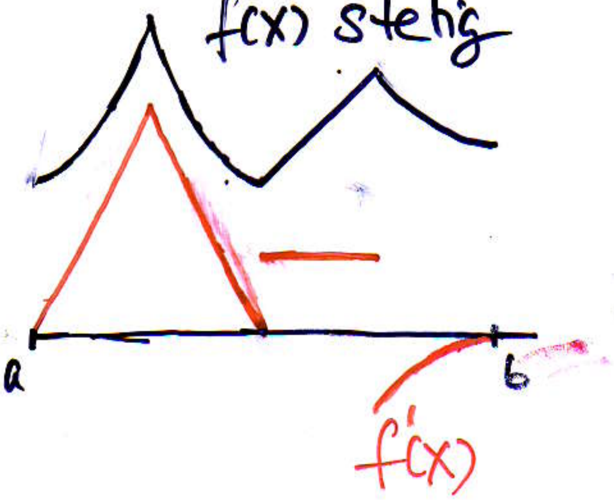
$f(x_0^+) - f(x_0^-)$ **Sprunghöhe**



$f(x)$ **stückweise stetig** auf $[a,b]$, falls erklärt und stetig bis auf endlich viele Sprungstellen



$f(x)$ **stückweise stetig differenzierbar** auf $[a,b]$ falls $f'(x)$ erklärt und stetig bis auf endlich viele Sprungstellen



Wie beweist man glm. Konvergenz?

hinreichend: $|a_n| + |b_n| \leq \frac{c}{n^2}$

26.4.3

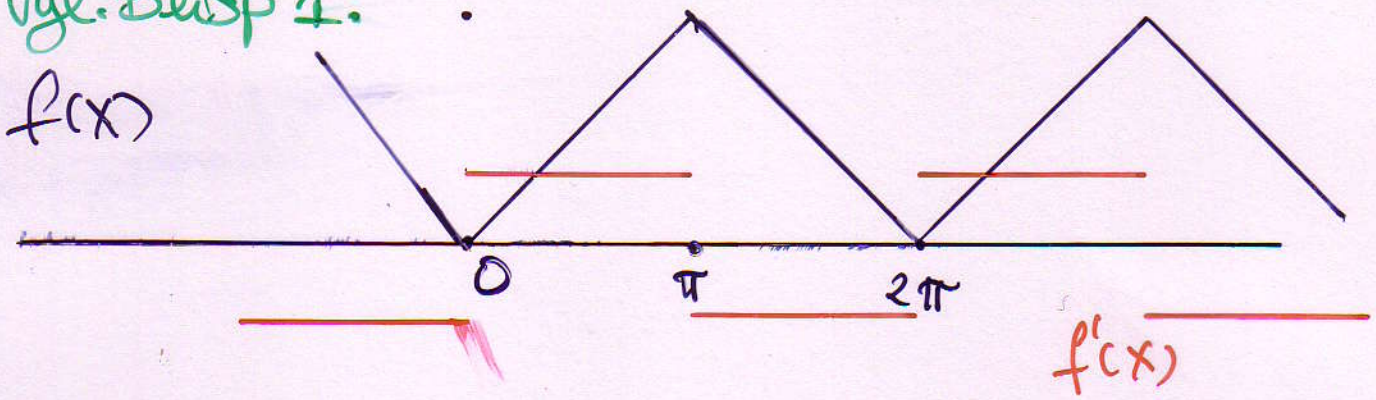
<u>Satz</u> 5.3 / 26.5 f 2π-per, stetig,
auf $[0, 2\pi]$ stückweise stetig differenzierbar
Unstetigkeitsstellen von f' mit endl. Sprunghöhen

Dann

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

gleichmäßig für alle $x \in \mathbb{R}$

vgl. Beisp 1.



nicht anwendbar auf Sägezahn

Bew. $|f'(x)| \le M$ für alle x

$0 = x_0 \le x_1 \le \dots x_r = 2\pi$ mit

$f'(x)$ erklärt und stetig auf (x_k, x_{k+1})

$f'(x) \ge 0$ auf (x_k, x_{k+1}) oder

$f'(x) \le 0$ auf (x_k, x_{k+1})

$$\pi a_n = \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx = \sum_{k=0}^{r-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) \cos nx \, dx$$

part. Integr

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{r-1} \underbrace{\lim_{\substack{a \to x_k \\ b \to x_{k+1}}} \left[\frac{1}{n} f(x) \sin nx\right]}_{= \left[\frac{1}{n} f(x) \sin nx\right]_{x_k}^{x_{k+1}}}}_{=0} - \sum_{k=0}^{r-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{1}{n} f'(x) \sin nx \, dx$$

uneigentlich!

f stetig!

$$|\pi a_n| \le \sum_{k=0}^{r-1} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{M}{n} \sin nx \, dx \right|$$

$$= \sum_{k=0}^{r-1} \frac{M}{n} \left| \left[-\frac{1}{n} \cos nx\right]_{x_k}^{x_{k+1}} \right| \le \sum_{k=0}^{r-1} \frac{M}{n^2} \overset{2}{\cancel{(x_{k+1} - x_k)}}$$

$$= \frac{M}{n^2} 2\cancel{\pi}(r-1)$$

26.4.4

Sägezahn $g(x) = \pi - x \quad 0 \le x < 2\pi$

Fourier-Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \sin nx$

Partialsumme $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k} \sin kx$

$m > n$

$$\left(\sin\frac{x}{2}\right)\left(S_m(x) - S_n(x)\right) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{\sin(n+1)x}{n+1} + \dots + \frac{\sin mx}{m}\right)$$

$$= \quad -\frac{\cos(n+\frac{3}{2})x}{n+1} - \frac{\cos(n+\frac{5}{2})x}{n+2} - \dots \quad -\frac{\cos(m+\frac{1}{2})x}{m}$$

$$\frac{\cos(n+\frac{1}{2})x}{n+1} + \frac{\cos(n+\frac{3}{2}x)}{n+2} + \frac{\cos(n+\frac{5}{2})x}{n+3} + \dots + \frac{\cos(m-\frac{1}{2})x}{m}$$

wegen $2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$

$$\text{Betrag} \le \frac{1}{n+1} + \frac{1}{m} + \sum_{k=n+1}^{m-1} \frac{1}{k(k+1)} < \varepsilon \text{ für } n > N_2$$

$0 < \delta < \frac{\pi}{2}$

$$|S_m(x) - S_n(x)| < \left|\sin\frac{x}{2}\right|\varepsilon \le \sin\frac{\delta}{2}\,\varepsilon$$

$$\delta \le x \le 2\pi - \delta, \quad m > n > N$$

also gleichmäßige Konvergenz auf $[\delta, 2\pi-\delta]$ gegen $S(x)$

Gliedweise Integration auf $[\delta, \pi]$

$$\int_0^x S(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{2}{n}\sin nt\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{n^2}\cos nx + C$$

Gliedweises differenzieren: $= \pi x - \frac{1}{2}x^2 + \tilde{C}$ Beisp. 3

$$S(x) = \pi - x \quad \text{auf } [\delta, \pi]$$

Für $[\pi, 2\pi-\delta]$ entspr. mit 2π-period. gerader Fortsetzung von $\pi x - \frac{1}{2}x^2 \quad \pi \le x \le 2\pi$

<u>Satz 5.4</u> 26.7 $f(x)$ 2π-periodisch, stückweise stetig und stückweise stetig differenzierbar auf $[0,2\pi]$, f und f' mit endlichen Sprunghöhen.

Dann
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin x = \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$$

$$= f(x) \quad \text{falls } f \text{ stetig an } x$$

Konvergenz gleichmäßig auf $[a,b]$ genau dann, wenn $f(x)$ stetig auf $[a,b]$.

Bew. Richtig für Sägezahn $g(x) = \pi - x \quad 0 \le x < 2\pi$

$x_1, \dots, x_m$ Sprungstellen von f, $h_1, \dots, h_m$ Sprunghöhen

$$\tilde{f}(x) = f(x) - \frac{h_1}{2\pi} g(x-x_1) - \dots - \frac{h_m}{2\pi} g(x-x_m)$$

$$\tilde{f}(x_k^+) - \tilde{f}(x_k^-) = f(x_k^+) - f(x_k^-) - \frac{h_k}{2\pi}\pi + \frac{h_k}{2\pi}\pi = 0$$

also nach 5.3 Beh. richtig für $\tilde{f}(x)$, also auch für $f(x) = \tilde{f}(x) +$ verschobene u. gestreckte Sägezähne