A Beispiel: Lineare DGL

A.1 Homogene DGL

$$y' = xy$$

Ansatz:

$$y = Ke^{P(x)}$$

Es folgt

$$y' = Ke^{P(x)}P'(x), \quad P'(x) = x, \quad P(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$$

Allgem. Lsg.

$$y_h = Ke^{\frac{1}{2}x^2}$$

Alternativ: Trennung der Veränderlichen
Singuäre Lösung $y = 0$. Für $y \neq 0$:

$$\frac{\partial y}{\partial y} = xy \Leftrightarrow \frac{1}{y}\frac{\partial y}{\partial x} = x \Leftrightarrow \frac{1}{y}\mathrm{d}y = \frac{1}{y}\frac{\partial y}{\partial x}\mathrm{d}x = x\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \ln|y| = \int \frac{1}{y}\mathrm{d}y = x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 + C$$

1. Fall $y > 0$

$$\ln y = \frac{1}{2}x^2 + C, \quad y = e^{\frac{1}{2}x^2+C} = e^C e^{\frac{1}{2}x^2}$$

2. Fall $y < 0$

$$\ln -y = \frac{1}{2}x^2 + C, \quad y = e^{\frac{1}{2}x^2+C} = -e^C e^{\frac{1}{2}x^2}$$

A.2 Inhomogen lineare DGL

$$y' = xy + x$$

Variation der Konstanten. Ansatz

$$y_s = K(x)e^{\frac{1}{2}x^2}$$

$$\text{Ableiten: } y_s' = K'(x)e^{\frac{1}{2}x^2} + K(x)xe^{\frac{1}{2}x^2}$$

$$\text{Einsetzen in DGL: } y_s' = xK(x)e^{\frac{1}{2}x^2} + x$$

$$\text{Gleichsetzen: } K'(x)e^{\frac{1}{2}x^2} = x$$

$$\text{Auflösen: } K'(x) = xe^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$\text{Integrieren: } K(x) = \int xe^{-\frac{1}{2}x^2} = -e^{-\frac{1}{2}x^2} + C$$

Wähle $C = 0$. Rückeinsetzen in Ansatz

$$\text{Spezielle Lösung: } y_s = K(x)e^{\frac{1}{2}x^2} = -e^{-\frac{1}{2}x^2}e^{\frac{1}{2}x^2} = -1$$

$$\text{Probe: } y_s' = 0 = x(-1) + x$$

Allgemeine Lsg.

$$y = y_h + y_s = Ke^{\frac{1}{2}x^2} - 1$$

Alternativ: Ansatz vom Typ der rechten Seite:

$$y_s = Ax + B$$

$$\text{Ableiten: } y_s' = A$$

$$\text{Einsetzen in DGL: } y_s' = x(Ax + B) + x = Ax^2 + (B + 1)x$$

$$\text{Gleichsetzen: } A = Ax^2 + (B + 1)x$$

$$\text{Koeffizientenvergleich: } A = 0, B = -1$$

$$\text{Spezielle Lösung: } y_s = -1$$

A.3 Anfangswertproblem

(AWP)

$$AWP \quad y' = xy, \quad y(0) = y_0 = Ke^{\frac{1}{2}0^2} \Leftrightarrow K = y_0$$

$$y(1) = y_0 == Ke^{\frac{1}{2}1^2} \Leftrightarrow K = y_0 e^{-\frac{1}{2}}$$

$$AWP \quad y' - xy + x, \quad y(0) = y_0 = Ke^{\frac{1}{2}0^2} - 1 \Leftrightarrow K = y_0 + 1$$

$$y(1) = y_0 = Ke^{\frac{1}{2}1^2} - 1 \Leftrightarrow K = (y_0 + 1)e^{-\frac{1}{2}}$$

B Differentiale

B.1 Diffeentiale

Für eine auf $[a, b]$ definierte und differenzierbare Funktion $y = f(t)$ ist das *Differential* an der Stelle $p \in [a, b]$ die homogen lineare Funktion

$$\mathrm{d}f(p, \mathrm{d}t) = \frac{\partial f}{\partial t}(p) \cdot \mathrm{d}t = \frac{\partial y}{\partial t}\mathrm{d}t \quad \mathrm{d}t \in p - a \leq \mathrm{d}t \leq b, \;\; \mathrm{d}t \neq 0$$

oder wenn man die Stelle p nicht explizit erwähnt

$$\mathrm{d}y = \frac{\partial y}{\partial t}\mathrm{d}t.$$

Das Differential an der Stelle p ist natürlich schon dann bekannt, wenn man es für ein einziges $\mathrm{d}t \neq 0$ kennt.

Seien nun $x = x(t)$ und $y = y(t)$ auf $[a, b]$ differenzierbar und sei y eine differenzierbare Funktion von x, also nach der Kettenregel

$$y(t) = y = y(x) = y(x(t)), \;\; \frac{\partial y}{\partial t}(p) = \frac{\partial y}{\partial x}(x(p)) \cdot \frac{\partial x}{\partial t}(p)$$

$$\mathrm{d}y(p, \mathrm{d}t) = \frac{\partial y}{\partial t}(p) \cdot \mathrm{d}t = \frac{\partial y}{\partial x}(x(p)) \cdot \frac{\partial x}{\partial t}(p) \cdot \mathrm{d}t = \frac{\partial y}{\partial x}(x(p)) \cdot \mathrm{d}x(p, \mathrm{d}t)$$

d.h. wir können $\mathrm{d}y(p)$ auch als Differential bzgl. x verstehen. Dementsprechend haben wir die folgende *Konsistenzvoraussetzung* für den problemlosen Umgang mit Differentialen

* Alle betrachteten Größen sind stetig differenzierbare Funktionen einer vorgegebenen unabhängigen Variablen $t \in [a, b]$.

Dann gilt unzweideutig

$$\mathrm{d}y = \frac{\partial y}{\partial x}\mathrm{d}x$$

wie auch immer $y = y(x)$ differenzierbare Funktion von x, und

$$\frac{\partial y}{\partial x}(p) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(p) \quad \text{falls } \frac{\partial x}{\partial t}(p) \neq 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}(p) = 0 \quad \text{falls } \frac{\partial x}{\partial t}(p) = 0$$

B.2 Intergration

Der folgende Satz fasst die üblichen Integrationsregeln zusammen und zeigt, dass das sogenannte "formale Rechnen" legitim und sinnvoll ist, wenn die Konsistenzbedingung für Differentiale erfüllt ist. Der Vorteil dieser Rechnung ist die intuitive Notation und die Option, die Argumentwerte weitgehend zu unterdrücken (da diese über die Abhängigkeit von t gekoppelt sind).

Satz B.1 *Seien $x = x(t)$, $y = y(t)$ und $z = z(t)$ auf $[a, b]$ differenzierbar und $f(x)$, $g(y)$, $h(z)$ stetige Funktionen auf den jeweiligen Wertebereichen. Für die Differentiale gelte*

$$f(x(p))\mathrm{d}x(p) = cg(y(p))\mathrm{d}y(p) + h(z(p))\mathrm{d}z(p) \textit{ für alle } p \in [a, b]$$

$$\textit{kurz} \quad f(x)\mathrm{d}x = cg(y)\mathrm{d}y + h(z)\mathrm{d}z$$

Dann gilt: Für alle Stammfunktionen F, G, H von f, g bzw. h gibt es eine Konstante C mit

$$F(x(t)) = c\,G(y(t) + H(z(t)) \quad \textit{für alle } t \in [a, b]$$

kurz

$$\int f(x)\mathrm{d}x = c\int g(y)\mathrm{d}y + \int h(z)\mathrm{d}z \ + C$$

Beweis. Nach Voraussetzung haben wir

$$f(x)\frac{\partial x}{\partial t}\mathrm{d}t = cg(y)\frac{\partial y}{\partial t}\mathrm{d}t + h(z)\frac{\partial z}{\partial t}\mathrm{d}t$$

also

$$\phi(t) := f(x)\frac{\partial x}{\partial t} = cg(y)\frac{\partial y}{\partial t} + h(z)\frac{\partial z}{\partial t}$$

Dann

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} = f(x)\frac{\partial x}{\partial t} = \phi(t)$$

$$\frac{\partial(cG + H)}{\partial t} = c\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial t} =$$

$$= c\frac{\partial G}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} = cg(y)\frac{\partial y}{\partial t} + h(z)\frac{\partial z}{\partial t} = \phi(t)$$

C Satz von Picard-Lindelöf

Satz C.1 *$f(x,y)$ sei stetig auf dem Streifen $S = \{(x,y) \mid x \in [x_0-b,\ x_0+a]\}$ und genüge dort der Lipschitzbedingung*

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le L|y_1 - y_2|$$

Dann hat das AWP $y' = f(x,y),\ y_0 = y(x_0)$ eine eindeutig bestimmte Lösung $y : [x_0 - b,\ x_0 + x] \to \mathbb{R}$.

Integralgleichung. Das AWP ist äquivalent zu

$$(*) \quad y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\ y(t))\mathrm{d}t$$

In der Tat, nach dem Hauptsatz

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} y'\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x} f(t,\ y(t))\mathrm{d}$$

Umgekehrt ist das Integral als Funktion der oberen Grenze differenzierbar und es gilt

$$\frac{\partial}{\partial x}(y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\ y(t))\mathrm{d}t) = f(x, y(x))$$

Picard-Iteration. Näherungslösungen der Integralgleichung $(*)$ werden durch Iteration bestimmt

$$y_{[0]}(x) = y_0, \quad y_{[n+1]}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\ y_{[n]}(t))\mathrm{d}t$$

Das können wir auch so notieren

$$y_{[0]} = y_0, \ \ y_{[n+1]} = T(y_{[n]})$$

mit dem Operator

$$T(y) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\ y(t))\mathrm{d}t$$

Dass y eine Lösung der Integralgleichung $(*)$ ist, bedeutet dann gerade, dass y ein *Fixpunkt* von T ist

$$T(y) = y$$

Beispiel: $y' = y,\ y(0) = 1$

$$y_{[0]} = 1,\ y_{[n]} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k$$

$$y_{[n+1]} = 1 + \int_{x_0}^{x} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!}x^k$$

Die Lösung von $(*)$ wird dann als Limes der Näherungen bestimmt

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_{[n]}(x)$$

im Beispiel also $y(x) = e^x$.

Banachscher Fixpunktsatz. Wir beschreiben zunächst ein analoges Vorgehen für eine Abbildung $T : G \to G$, wobei $G \subseteq \mathbb{R}^n$, z.B. $n = 2$, abgeschlossen. Wir setzen voraus, dass T *kontrahierend* ist, d.h. es gibt Konstante $K < 1$ mit

$$\|T(x) - T(x')\| \leq K\|x - x'\| \quad \text{für alle } x, x' \in G$$

Insbesondere ist T Lipschitz-stetig. Wir behaupten nun

- Es gibt ein eindeutig bestimmtes $x_\infty \in G$ mit $T(x_\infty) = x_\infty$ (Fixpunkt) und für jedes $x_0 \in G$ konvergiert die rekursiv definierte Folge $x_{n+1} = T(x_n)$ gegen x_∞.

Beweis. Die x_n bilden eine Cauchy-Folge, da für $n < m$

$$\|x_n - x_m\| \leq \sum_{k=n}^{m-1} \|x_k - x_{k+1}\| \leq \sum_{k=n}^{m} K^k \|x_0 - x_1\| \to 0 \text{ für } n \to \infty$$

wie man von der geometrischen Reihe weiss. Also gibt es

$$x_\infty = \lim_{n\to\infty} x_n$$

und wegen der Stetigkeit folgt

$$T(x_\infty) = x_\infty$$

Ist nun auch $T(x) = x$, so

$$\{x - x_\infty\| = \|T(x) - T(x_\infty)\| \leq K\|x - x_\infty\|$$

also $x = x_\infty$ da $K < 1$. $\square$

Wir betrachten nun den Funktionenraum

$$G = \{y \mid y : [x_0,\, x_0 + a] \to \mathbb{R} \text{ stetig } \}$$

mit dem Abstand

$$\|y_1 - y_2\| = \max\{|y_1(x) - y_2(x)| \ \mid x \in [x_0,\, x_0 + a]\}$$

Der obige Beweis gilt hier ganz entsprechend:

$$y_\infty = \lim_{n\to\infty} y_n$$

bedeutet hier, dass die Funktionenfolge y_n *gleichmäßig* gegen die Funktion y konvergiert. Inbesondere gibt es zu jeder Cauchy-Folge y_n eine stetige Funktion y, die der eindeutig bestimmte Limes dieser Folge ist. Der Fixpunktsatz und sein Beweis übertragen sich Wort für Wort.

Beim Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf setzen wir nun voraus, dass $aL = K < 1$ - indem wir das Intervall passend einschränken - und zeigen, dass der Operator T kontrahierend ist

$$\|T(y_1) - T(y_2)\| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t,\, y_1(t) - f(t,\, y_2(t)|\mathrm{d}t \leq \int_{x_0}^{x} L|y_1(t) - y_2(t)|\mathrm{d}t$$

$$\leq \int_{x_0}^{x} L\|y_1 - y_2\|\|\mathrm{d}t \leq aL\|y_1 - y_2\| = K\|y_1 - y_2\|$$

Damit können wir den Fixpunktsatz anwenden, d.h. es gibt ein eindeutig bestimmtes y_∞ mit

$$T(y_\infty) = y_\infty$$

das bedeutet aber dasselbe, wie die Lösung der Intergralgleichung $(*)$ und damit des gegebenen AWPs.

Für beliebiges a zerlegen wir $[x_0,\, x_0 + a]$ in Teilintervalle $[x_k, x_{k+1}]$, auf die wir obigen Beweis anwenden können (d.h. $(x_{k+1} - x_k)L < 1$) und lösen iterativ die AWPe

$$\mathrm{AWP}_k : \quad y' = f(x, y),\ y(x_k) = u_k,\ \ y : [x_k,\, x_{k+1}] \to \mathbb{R}$$

wobei $u_0 = y_0$ und $u_k = y(x_k)$ für die Lösung y des AWP_{k-1}. Ensprechend verfahren wir für $[x_0 - b,\, x_0]$. Setzt man die Lösungen zusammen, so erhält man die Iterationsfolge der Näherungsösungen nach Picard

$$y_{[0]}(x) = y_0, \quad y_{[n+1]}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\, y_{[n]}(t))\mathrm{d}t, \quad x \in [x_0 - b,\, x_0 + a]$$

und die Lösung des AWP

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_{[n]}(x), \quad x \in [x_0 - b,\, x_0 + a]$$

Ein Problem besteht jedoch darin, die Integrale zu bestimmen.

D Systeme von DGLn erster Ordnung

D.1 Vektorfunktionen

Sei $\vec{y} = \vec{y}(x)$ eine *Vektorfunktion*, d.h. Abbildung $\vec{y} : I \to \mathbb{R}^n$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y^{[1]}(x) \\ \vdots \\ y^{[n]}(x) \end{pmatrix}$$

Ableitung und Integration erfolgen komponentenweise

$$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} y^{[1]\,\prime}(x) \\ \vdots \\ y^{[n]\,\prime}(x) \end{pmatrix}, \quad \int_a^b \vec{y}(x)\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} \int_a^b y^{[1]}(x)\mathrm{d}x \\ \vdots \\ \int_a^b y^{[n]}(x)\mathrm{d}x \end{pmatrix}$$

D.2 Systeme

Ein *System* von n DGLn erster Ordnung wird gegeben durch Abbildungen $f_i : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccc} y^{[1]\,\prime} & = & f^{[1]}(x, y^{[1]}, \ldots, y^{[n]}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y^{[n]\,\prime} & = & f^{[n]}(x, y^{[1]}, \ldots, y^{[n]}) \end{array}$$

in Kurzschreibweise mit $\vec{f} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$

$$\vec{y}\,' = \vec{f}(x, \vec{y})$$

Aus einer DGL $y'' = f(x, y, y')$ wird durch $y^{[1]} = y$, $y^{[2]} = y'$ das System

$$\begin{array}{rcl} y^{[1]\,\prime} & = & y^{[1]} \\ y^{[2]\,\prime} & = & f(x, y^{[1]}, y^{[2]}) \end{array}$$

D.3 Picard-Lindelöf

Satz D.1 Existenz und Eindeutigkeit. *Ist $\vec{f}(x, \vec{y})$ auf $I \times \mathbb{R}^n$ stetig und genügt einer Lipschitzbedingung*

$$\|\vec{f}(x, \vec{y}_1) - \vec{f}(x, \vec{y}_2)\| \le L\|\vec{y}_1 - \vec{y}_2\|$$

(z.B. falls $\vec{f}$ nach den y_i stetig partiell differenzierbar ist) so hat das

$$AWP \quad \vec{y}\,' = \vec{f}(x, \vec{y}), \;\; \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$$

eine eindeutig bestimmte Lösung $\vec{y} : I \to \mathbb{R}^n$. Insbesondere besagt die Eindeutigkeit

Sind $\vec{y}_1$ und $\vec{y}_2$ Lösungen des Systems $\vec{y}\,' = \vec{f}(x, \vec{y})$ und gilt $\vec{y}_1(x_0) = \vec{y}_2(x_0)$ für ein $x_0 \in I$, so gilt $\vec{y}_1(x) = \vec{y}_2(x)$ für alle $x \in I$

Der Beweis ergibt sich wie für DGLn erster Ordnung.

D.4 Systeme linearer DGLn erster Ordnung

Sind die Funktionen f_i von der Form

$$f_i(x, y^{[1]}, \ldots, y^{[n]}) = a_{i1}(x)y^{[1]} + \ldots + a_{in}(x)y^{[n]} + b_i(x)$$

so spricht man von einem linearen System und kann es schreiben als

$$(*) \;\; \vec{y}\,' = A(x)\vec{y} + \vec{b}(x) \quad \text{mit} \;\; A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \ldots & a_{1n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(x) & \ldots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

Das zugehörige *homogene* System ist

$$(**) \quad \vec{y}_h\,' = A(x)\vec{y}_h$$

Wie bei den linearen DGLn. erster Ordnung zeigt man

Satz D.2 *Ist $\vec{y}_s$ eine (sog. spezielle) Lösung von $(*)$ so ist $\vec{y}$ eine Lösung von $(*)$ genau dann, wenn $\vec{y} = \vec{y}_h + \vec{y}_s$ mit einer Lösung $\vec{y}_h$ des homogenen Systems $(**)$.*

D.5 Fundamentalsystem von Lösungen

Lineare Algebra

- Vektorraum V: $\vec{v}+\vec{w}$, $\quad r\vec{v}\ \ (r\in\mathbb{R})$
- Linearkombination $\vec{v}=r_1\vec{v}_1+\ldots+r_n\vec{v}_n$
- $\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n$ erzeugen V
  $\Leftrightarrow$ jedes $\vec{v}\in V$ ist Linearkombination
- $\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n$ linear unabhängig
  $\Leftrightarrow \vec{0}=r_1\vec{v}_1+\ldots+r_n\vec{v}_n$ nur mit $r_1=\ldots=r_n=0$
- $\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n$ Basis von V
  $\Leftrightarrow$ linear unabhängig und erzeugend

- Ist V von endlich vielen Vektoren erzeugt, so hat V eine Basis
- Je zwei Basen von V haben dieselbe Elementanzahl $n=\dim V$
- Ist $n=\dim V<\infty$, so sind für $\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n\in V$ äquivalent
  - $\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n$ ist Basis von V
  - $\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n$ sind unabhängig
  - $\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n$ erzeugen V
  - Jedes $\vec{v}\in V$ hat eindeutige Darstellung
    $\vec{v}=r_1\vec{v}_1+\ldots+r_n\vec{v}_n$
- $\dim\mathbb{R}^n=n$

Ein *Linearkombination* von Vektorfunktionen $\vec{y}_1,\ldots,\vec{y}_m$ mit $\vec{y}_j: I\to\mathbb{R}^n$ ist von der Form

$$\vec{y}=c_1\vec{y}_1(x)+\ldots+c_m\vec{y}_m(x)\quad\text{für alle } x\in I$$

mit Konstanten $c_1,\ldots,c_m$ in $\mathbb{R}$. Es gilt

- Jede Linearkomination von Lösungen des homogenen Systems $(**)$ ist ebenfalls Lösung von $(**)$.

In der Tat

$$\vec{y}\,'=c_1\vec{y}_1{}'+\ldots+c_m\vec{y}_m{}'=c_1A\vec{y}_1+\ldots+c_mA\vec{y}_m=A(c_1\vec{y}_1+\ldots+c_m\vec{y}_m)=A\vec{y}$$

Somit bilden die Lösungen von $(**)$ einen reellen Vektorraum V und es stellt sich die Frage nach den Basen dieses Vektorraums. Hier sind $\vec{y}_1,\ldots,\vec{y}_m$ *linear abhängig* genau dann, wenn es $c_1,\ldots,c_m$ gibt, die nicht alle $=0$ sind, sodass $c_1\vec{y}_1(x)+\ldots+c_m\vec{y}_m(x)=\vec{0}$ für alle $x\in I$. Andernfalls sind sie *linear unabhängig*. Eine Basis von V, auch *Fundamentalsystem* von Lösungen von $(**)$, besteht aus m unabhängigen Lösungen $\vec{y}_1,\ldots,\vec{y}_m$ so, dass jede andere Lösung eine Linearkombination von diesen ist.

Satz D.3 *Zu jedem homogenen System* $(**)$ *von* n *linearen DGLn erster Ordnung gibt es ein Fundamentalsystem* $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n$ *und jedes Fundamentalsystem besteht aus* n *Lösungen. Für Lösungen* $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n$ *von* $(**)$ *sind die folgenden Aussagen äquivalent*

(1) $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n$ *bilden ein Fundamentalsystem*

(2) Es gibt $x_0 \in I$ *so, dass die Vektoren* $\vec{y}_1(x_0), \ldots, \vec{y}_n(x_0)$ *in* $\mathbb{R}^n$ *linear unabhängig sind*

(2') Es gibt $x_0 \in I$ *so, dass* $\det(\vec{y}_1(x_0), \ldots, \vec{y}_n(x_0)) \neq 0$

(3) Für alle $x_0 \in I$ *sind die Vektoren* $\vec{y}_1(x_0), \ldots, \vec{y}_n(x_0)$ *in* $\mathbb{R}^n$ *linear unabhängig*

(3') Für alle $x_0 \in I$ *gilt* $\det(\vec{y}_1(x_0), \ldots, \vec{y}_n(x_0)) \neq 0$

(4) Jede Lösung $\vec{y}$ *von* $(**)$ *ist Linearkombination der* $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n$

Beweis. Ist I ein kompaktes Intervall, so können wir den Satz von Picard-Lindelöf anwenden

$$\|A(x)\vec{y}_1 - A(x)\vec{y}_2\| = \|A(x)(\vec{y}_1 - \vec{y}_2)\| \leq L\|\vec{y}_1 - \vec{y}_2\|$$

mit $L = \max\{|a_{ij}(x)| \mid i, j \leq n,\ x \in I\}$. Andererseits können wir zu jedem x_0 und n unabhängigen Vektoren $\vec{y}_{10}, \ldots, \vec{y}_{n0}$ in $\mathbb{R}^n$ diese als Anfangswerte vorgeben und erhalten somit n unabhängige Lösungen $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n$: $\vec{y}_j$ ist die Lösung des

$$AWP \quad \vec{y}' = A(x)\vec{y},\ \ \vec{y}(x_0) = \vec{y}_{j0}$$

Ist $\vec{y}$ nun eine weitere Lösung von $(**)$, so gibt es Konstanten $c_1, \ldots, c_n$ in $\mathbb{R}$ mit

$$\vec{y}(x_0) = c_1\vec{y}_{10} + \ldots + c_n\vec{y}_{n0} = c_1\vec{y}_1(x_0) + \ldots + c_n\vec{y}_n(x_0)$$

da ja $\vec{y}_{10}, \ldots, \vec{y}_{n0}$ Basis von $\mathbb{R}^n$ ist. Aus der Eindeutigkeit folgt

$$\vec{y}(x) = c_1\vec{y}_1(x) + \ldots + c_n\vec{y}_n(x) \qquad \text{für alle } x$$

Das beweist auch, dass (1) aus (2) folgt. Ebenfalls aus der Eindeutigkeit folgt sofort

- Sind die $\vec{y}_j$ Lösungen von $(**)$ und $\vec{y}(x_0) = c_1\vec{y}_1(x_0) + \ldots + c_m\vec{y}_m(x_0)$ für ein $x_0 \in I$ so gilt $\vec{y}(x) = c_1\vec{y}_1(x) + \ldots + c_m\vec{y}_m(x)$ für alle $x \in I$.

Also folgt (2) aus (2). Dass (2) und (2') sowie (3) und (3') äquivalent sind, weiss man aus Mathematik II, Lineare Algebra. Ebenso, dass alle Basen dieselbe Elementanzahl n haben und dass dann n Vektoren, die den Raum aufspannen, immer schon eine Basis bilden. □

D.6 Lineare DGL n-ter Ordnung

Eine lineare DGL n-ter Ordnung ist von der Form

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \ldots + a_n(x)y^{(n)} = b(x)$$

Diese übersetzen wir in ein System vermöge

$$y^{[1]} = y,\ y^{[2]} = y',\ \ldots, y^{[n]} = y^{(n-1)}$$

$$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_0(x)}{a_n(x)} & -\frac{a_1(x)}{a_n(x)} & & \dots & -\frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)} \end{pmatrix} \vec{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{b(x)}{a_n(x)} \end{pmatrix}$$

Damit können wir (für $a_n(x) \neq 0$) die Ergebnisse über lineare Systeme erster Ordnung anwenden. Dem homogenen System entspricht dabei die homogene DGL

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \ldots + a_n(x)y^{(n)} = 0$$

Für n Lösungen $y_1, \ldots, y_n$ dieser homogenen DGL bilden wir entsprechend (2') und (3') des Satzes die *Wronski-Matrix*

$$W(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

$\det W(x)$ heisst auch *Wronski-Determinante*. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent

(i) $y_1, \ldots, y_n$ ist ein Fundamentalystem

(ii) $\det W(x_0) \neq 0$ für ein $x_0 \in I$

(iii) $\det W(x) \neq 0$ für alle $x \in I$

(iv) Jede Lösung y der homogenen DGL ist Linearkombination der $y_1, \ldots, y_n$

Insbesondere ist die Existenz mindestens eines Fundamentalystems $y_1, \ldots, y_n$ gesichert und die Lösungen der inhomogenen DGL ergeben sich aus einer speziellen Lösung y_s als

$$y = c_1y_1 + \ldots c_ny_n + y_s$$

D.7 Variation der Konstanten

Für das System

$$\vec{y}\,'(x) = A(x)\vec{y}(x) + \vec{b}(x)$$

sei ein Fundamentalsystem $\vec{y}_1(x), \ldots, \vec{y}_n(x)$ von Lösungen des homogenen Systems $\vec{y}\,'(x) = A(x)\vec{y}(x)$ gegeben. Wir schreiben das Fundamentalsystem die Spalten einer Matrix

$$Y(x) = (\vec{y}_1(x) \ldots \vec{y}_n(x))$$

Dann ist $Y(x)$ für alle x invertierbar, da $\det Y(x) \neq 0$. Dass die $\vec{y}_j$ Lösungen von $\vec{y}\,'(x) = A(x)\vec{y}(x)$ sind, drückt man mithlife des Matrizenprodukts auch so aus

$$Y'(x) == A(x)Y(x)$$

Wie machen nun für eine Lösung $\vec{y}_s$ des inhomogenen Systems $\vec{y}\,'(x) = A(x)\vec{y}(x) + \vec{b}(x)$ den Ansatz

$$\vec{y}_s = C_1(x)\vec{y}_1(x) + \ldots + C_n(x)\vec{y}_n(x) = Y(x)\vec{C}(x)$$

mit

$$\vec{C}(x) = \begin{pmatrix} C_1(x) \\ \vdots \\ C_n(x) \end{pmatrix}$$

In der folgenden Rechnung ist die Variable x nicht mitgeschrieben. Nach der Produktregel folgt aus dem Ansatz

$$\vec{y}_s{}' = Y'\vec{C} + Y\vec{C}\,' = AY\vec{C} + Y\vec{C}'$$

da, wie oben bemerkt, $Y' = AY$ ausdrückt, dass die $\vec{y}_j$ das homogene System lösen. Dass $\vec{y}_s = Y\vec{C}$ Lösung des inhomogenen Systems ist, bedeutet

$$\vec{y}_s{}' = A\vec{y}_s + \vec{b} = AY\vec{C} + \vec{b}$$

Es folgt durch Gleichsetzung

$$Y\vec{C}\,' = \vec{b} \text{ d.h. } Y(x)\vec{C}\,'(x) = \vec{b}(x)$$

d.h. ein lineares Gleichungsystem für die $C_j'(x)$. Ist das DGL-System aus einer linearen DGL

$$a_n(x)y^{(n)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = \underline{(}x)$$

n-ter Ordnung hergeleitet, so hat man das Gleichungsystem

$$W(x)\begin{pmatrix} C_1'(x) \\ \vdots \\ C_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \frac{b(x)}{a_n(x)} \end{pmatrix}$$

Das lineare Gleichungsssystem löst man durch Gaußsches Eliminationsverfahren oder durch Inversion von $Y(x)$

$$\vec{C}\,'(x) = Y^{-1}(x)\vec{b}(x)$$

Anschliessend bestimmt man die $C_j(x)$ durch Integration der $C_j'(x)$ und hat dann die spezielle Lösung

$$\vec{y}_s = C_1(x)\vec{y}_1(x) + \ldots + C_n(x)\vec{y}_n(x)$$

des inhomogenen Systems. Die allgemeine Lösung ist dann

$$\vec{y} = C_1\vec{y}_1(x) + \ldots + C_n(x)\vec{y}_n(x) + \vec{y}_s \quad C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R}$$

D.8 Reduktion der Ordnung

Gegeben eine homogen lineare DGL n-ter Ordnung

$$L(y) = a_n(x)y^{(n)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

Ist eine Lösung $u = u(x)$ bekannt, so macht man den *Produktansatz* $y = vu$ und erhält für $w = v'$ eine DGL $M(w) = 0$ der Ordnung $n-1$: durch Ableiten nach der Produktregel

$$y^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} v^{(k)} u^{(m-k)}$$

und Einsetzen in L

$$L(y) = L(vu) = vL(u) + M(v')$$

also

$$(*) \quad L(vu) = 0 \;\Leftrightarrow\; M(w) = 0$$

Ist $w_2, \ldots, w_n$ ein Fundamentalsystem für $M(w) = 0$ und hat man durch Integration v_i bestimmt mit

$$v_2' = w_2, \ldots, v_n' = w_n$$

so erhält man ein Fundamentalsystem für $L(y) = 0$

$$y_1 = u \cdot 1 = u,\; y_2 = uv_2, \ldots, y_n = uv_n$$

Wegen $(*)$ sind dies Lösungen und aus

$$C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n = 0$$

folgt durch Division durch u

$$C_1 + C_2v_2 + \ldots + C_nv_n = 0$$

und durch Differenzieren

$$C_2w_2 + \ldots + C_nw_n = 0$$

also wegen Unabhángigkeit der $w_2, \ldots, w_n$ nun $C_2 = \ldots = C_n = 0$ und dann auch $C_1 = 0$.

E Lineare DGLn mit konstanten Koeffizienten

E.1 Charakteristisches Polynom

Gegeben die homogene DGL

$$L(y) = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1y' + a_0y = 0$$

mit konstanten Koeffizienten a_i. Das Polynom

$$P_L(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$$

heisst das *charakteristische Polynom* der DGL.

Satz E.1

$$L(y) = 0 \quad \textit{für } y = x^{k-1}e^{\lambda x}$$

genau dann, wenn λ mindestens k-fache Nullstelle von $P_L(X)$ ist.

Beweis durch Induktion über k. In Falle $k = 1$ haben wir

$$y = e^{\lambda x},\ y^{(l)} = \lambda^l e^{\lambda x}$$

$$L(e^{\lambda x}) = \lambda^n e^{\alpha x} + a_{n-1}\lambda^{n-1}e^{\lambda x} + \ldots + a_1\lambda e^{\lambda x} + a_0 e^{\lambda x}$$
$$= (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0)e^{\lambda x} = P_L(\lambda)e^{\lambda x}$$

also

$$L(e^{\lambda x}) = 0 \ \Leftrightarrow\ P_L(\lambda) = 0$$

Wir fassen nun L als *Differentialoperator* auf

$$L(y) = (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})^n(y) + a_{n-1}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})^{n-1}(y) + \ldots + a_1(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})^1(y) + a_0(y)$$

$$= ((\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})^n + a_{n-1}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})^{n-1} + \ldots + a_1(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})^1 + a_0)(y) = P_L(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})(y)$$

Sei nun $k > 1$, also

$$P_L(X) = Q(X)(X - \lambda)$$

Es folgt

$$P_L(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})(y) = Q(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})[(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \lambda)(y)]$$

wobei $Q(X) = P_M(X)$ für eine DGL $M(Y) = 0$ der Ordnung $n - 1$. Für $y = x^{k-1}e^{\lambda x}$ ergibt sich

$$P_L(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})(y) = Q(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})[(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \lambda)(x^{k-1}e^{\lambda x})]$$

$$= Q(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})[(k-1)x^{k-2}e^{\lambda} + x^{k-1}\lambda e^{\lambda x} - \lambda x^{k-1}e^{\lambda}] = (k-1)Q(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})[x^{k-2}e^{\lambda}]$$

Nach Induktionsannahme gilt

$$M(x^{k-2}e^{\lambda}) = Q(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})[x^{k-2}e^{\lambda}] = 0 \Leftrightarrow \ \lambda \text{ mindestens k-1-fache Nullstelle von } Q(X)$$

Ersteres ist, wie gezeigt, zu $L(x^{k-1}e^{\alpha x}) = 0$ äquivalent, letzters dazu, dass λ mindestens k-fache Nullstelle von $P_L(X)$ ist. □

E.2 Unabhängigkeit

Satz E.2 *Sind die $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ paarweise verschieden, so ist die folgende Menge von Funktionen unabhängig*

$$x^r e^{\lambda_k x} \quad k = 1, \ldots, s,\ r = 1, \ldots, m_k$$

Beweis. Man kann das auch so formulieren: Sind die $p_k(x)$ Polynome mit

$$0 = \sum_{k=1}^{s} p_k(x)e^{\lambda_k x}$$

so ist jedes $p_k(x)$ das Nullpolynom. Für $s = 1$ haben wir

$$p_1(x)e^{\lambda_1 x} = 0$$

also $p_1(x) = 0$ da $e^{\lambda_1 x} \neq 0$ für alle x. Nun für $s > 1$ Induktion

$$p_s(x)e^{\lambda_k x} = -\sum_{k=1}^{s-1} p_k(x)e^{\lambda_k x}$$

$$p_s(x) = -\sum_{k=1}^{s-1} p_k(x)e^{(\lambda_k-\lambda_s)x}$$

und Grad von $p_s(x)$-maliges Differenzieren ergibt

$$0 = -\sum_{k=1}^{s-1} q_k(x)e^{(\lambda_k-\lambda_s)x}$$

mit Polynomen $q_k(x)$ vom gleichen Grad wie $p_k(x)$. In der Tat, für $a \neq 0$ und $\mu \neq 0$ hat man

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(ax^m + \ldots)e^{\mu x}] &= (\mu a x^m + \ldots +)e^{\mu x} + ((max^{m-1} + \ldots +)e^{\mu x} \\ &= (\mu a x^m + bx^{m-1} + \ldots +)e^{\mu x}\end{aligned}$$

also mit Polynom gleichen Grades. Nach Induktionsannahme ist für $k < s$ jedes $q_k(x)$ das Nullpolynom, also auch das Polynom $p_k(x)$ gleichen Grades. Dann ist auch $p_s(x)$ das Nullpolynom. □

E.3 Komplexe Exponentialfunktion

Bezeichne i die imaginäre Einheit, also $i^2 = -1$. Wir definieren für $\lambda = \alpha + i\beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$y = e^{\lambda x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i \sin\beta x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

Das können wir als Vektorfunktion auffassen

$$y = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x = \begin{pmatrix} e^{\alpha x}\cos\beta x \\ e^{\alpha x}\sin\beta x \end{pmatrix}$$

also

$$\begin{aligned} y' &= \begin{pmatrix} \alpha e^{\alpha x}\cos\beta x - \beta e^{\alpha x}\sin\beta x \\ \alpha e^{\alpha x}\sin\beta x + \beta e^{\alpha x}\cos\beta x \end{pmatrix} \\ &= (\alpha e^{\alpha x}\cos\beta x - \beta e^{\alpha x}\sin\beta x) + i(\alpha e^{\alpha x}\sin\beta x + \beta e^{\alpha x}\cos\beta x) \\ &= e^{\alpha x}[\alpha\cos\beta x + i\beta i\sin\beta x + i\alpha\sin\beta x + i\beta\cos\beta x] \\ &= e^{\alpha x}(\alpha + i\beta)[\cos\beta x + i\sin\beta x] = \lambda e^{\lambda x}\end{aligned}$$

$$\boxed{y = e^{\lambda x} \Rightarrow y' = \lambda e^{\lambda x} \text{ für } \lambda \in \mathbb{C},\ x \in \mathbb{R}}$$

E.4 Komplexes Fundamentalsystem

Satz E.3 *Zu einer homogenen DGL $L(y) = 0$ n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten erhält man ein Fundamentalsystem mit den komplexwertigen Funktionen*

$$x^{k-1}e^{\lambda x} \quad \lambda \textit{ mindestens k-fache Nullstelle von } P_L(X)$$

Beweis. Für konstante Koeffizienten (auch solche in $\mathbb{C}$) gelten Sätze E.1 und E.2 und der Existenz- und Eindeutigkeitssatz für lineare DGLn entsprechend für komplexwertige Funktionen y. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra ist aber $P_L(X)$ ein Produkt von n Linearfaktoren $X - \lambda_k$, also erhält man nach Satz E.1 und E.2 n unabhängige Lösungen und damit ein Fundamentalsystem. □

E.5 Reelles Fundamentalsystem

Für eine komplexe Zahl z ist die *konjugierte* definiert als

$$\overline{z} = a - bi, \quad z = a + bi \text{ mit } a, b \in \mathbb{R}$$

Es gilt

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \ \ \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$$

und es folgt

$$\boxed{P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow P(\overline{\lambda}) = 0 \quad P(X) \text{ reelles Polynom}}$$

Lemma E.4 *Für $\lambda = \alpha + i\beta$ gilt*

$$e^{\alpha x}\cos\beta x = \operatorname{Re} e^{\lambda x} = \frac{1}{2}(e^{\lambda x} + e^{\overline{\lambda}x}), \quad e^{\alpha x}\sin\beta x = \operatorname{Im} e^{\lambda x} = \frac{1}{2i}(e^{\lambda x} - e^{\overline{\lambda}x})$$

Beweis.

$$\overline{e^{\lambda x}} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x) = e^{\alpha x}(\cos -\beta x + i\sin -\beta x) = e^{\overline{\lambda}x}$$

Satz E.5 *Eine DGL mit konstatnen Koeffzienten in $\mathbb{R}$ hat ein Fundamentalsystem bestehend aus den folgenden reelen Funktionen*

$$x^{k-1}e^{\lambda x} \quad \lambda \in \mathbb{R} \textit{ mindestens k-fache Nullstelle von } P_L(X)$$

$$x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta = \operatorname{Re}(x^{k-1}e^{\lambda x}),\ x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta = Im(x^{k-1}e^{\lambda x})$$
$$\lambda = \alpha + i\beta \notin \mathbb{R} \textit{ mindestens k-fache Nullstelle von } P_L(X)$$

Beweis. Aus dem komplexen Fundamentalsystem ergibt sich ein System von n Lösungen, indem man nach dem Lemma zwei konjuierte komplexe Lösungen nach dem Lemma durch reelle Funktionen ersetzt, die als Linearkombinationen (mit komplexen Koeffizienten) wieder Lösungen sind. Die Gesamtzahl ist unverändert n. Da man aus den reellen Lösungen die komplexen wieder als Linearkombination (mit Koeffizienten $1, i$) zurückerhält, gilt nach wie vor Unabhängigkeit über $\mathbb{C}$, also erst recht über $\mathbb{R}$. Daher hat man ein Fundamentalystem. □

E.6 Inhomogene DGL: Ansatz von Typ der rechten Seite

Ist die rechte Seite der DGL eine Summe, so benutze man das offensichtliche

Lemma E.6 *$L(y_b) = b(y_b)$ und $L(y_c) = c(y_c)$ folgt $L(y) = b(y) + c(y)$ für $y = y_b + y_c$.*

Neben der Variation der Konstanten führt in bestimmten Fällen der *Ansatz von Typ der rechten Seite* zum Erfolg:

Satz E.7 *Gegeben $a_j, b_k \in \mathbb{R}$ und DGL $L(y) = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1y' + a_0 = b(x)$ mit*

$$b(x) = (b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m) \cdot \begin{cases} e^{\lambda x} & \lambda \in \mathbb{R} \\ e^{\alpha x}\cos\beta x & \lambda = \alpha + i\beta \\ e^{\alpha x}\sin\beta x & \lambda = \alpha + i\beta \\ e^{\alpha x}(\cos\beta x + \sin\beta x) & \lambda = \alpha + i\beta \end{cases}$$

Dann gibt es eine reelle Lösung y von $L(y) = b(x)$ von der Form

$$y = \begin{cases} \tilde{y} \\ \operatorname{Re}\tilde{y} \\ \operatorname{Im}\tilde{y} \\ \operatorname{Re}\tilde{y} + \operatorname{Im}\tilde{y} \end{cases}$$

wobei

$$\tilde{y} = x^k(B_0 + \ldots + B_m)e^{\lambda x} \qquad \textit{falls } \lambda \ k\textit{-fache Nullstelle von } P_L(X)$$

$$B_j \in \mathbb{R} \textit{ falls } \lambda \in \mathbb{R}, \quad B_j \in \mathbb{C} \textit{ falls } \lambda \in \mathbb{C}$$

Die B_j kann man aus der DGL $L(\tilde{y}) = b(\tilde{y})$ bestimmen.

Beweis. Zunächst eine einfache Vorüberlegung:

(∗) Gegeben $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, und Polynom $q(x)$. Dann gibt es ein Polynom $r(x)$ mit

$$(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \mu)[r(x)e^{\lambda x}] = q(x)e^{\lambda x} \qquad \text{mit } \operatorname{Grad}(r(x)) \begin{cases} = \operatorname{Grad}(q(x)) & \text{falls } \lambda \neq \mu \\ \leq \operatorname{Grad}(q(x)) + 1 & \text{falls } \lambda = \mu \end{cases}$$

In der Tat, für $r(x) = r_lx^l + \ldots + r_1x + r_0$ hat man

$$(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \mu)[r(x)e^{\lambda x}] = r'(x)e^{\lambda x} + \lambda r(x)e^{\lambda x} = (\lambda - \mu)r(x)e^{\lambda x} + r'(x)e^{\lambda x}$$

$$= (\lambda - \mu)r_lx^l + ((\lambda - \mu)r_{l-1} + lr_l)x^{l-1} + \ldots + ((\lambda - \mu)r_1 + 2r_2)x + (\lambda - \mu)r_0 + r_1$$

Setzt man dies gleich zu dem gegebenen

$$q(x) = q_mx^m + q_{m-1}x^{m-1} + \ldots q_1x + q_0, \quad q_l \neq 0$$

so folgt für $\lambda \neq \mu$ dass $m = l$ und für $\lambda = \mu$ dass $m \leq l + 1$. In beiden Fällen kann man $r_0, r_1, \ldots, r_m$ rekursiv aus den q_j bestimmen.

Der Beweis des Satzes erfolgt nun durch Induktion über den Grad von $P_L(X)$. Sei

$$q(x) = b_mx^m + \ldots + b_0 \quad b_m \neq 0$$

Wir zeigen, dass es ein Polynom $p(x)$ vom Grad $\leq m+k$ gibt so, dass $y = p(x)e^{\lambda x}$ eine Lösung der DGL ist, also

$$P_L(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})[p(x)e^{\lambda x}] = q(x)e^{\lambda x}$$

Wenn $P_L(X)$ eine Konstante ist, ist die Aussage trivial. Sei nun μ eine Nullstelle von $P_L(X)$, also $P_L(X) = (X-\mu)Q(X)$ mit $Q(X)$ von um 1 kleinerem Grad. Nach $(*)$ gibt es ein Polynom $r(x)$ vom Grad m falls $\mu \neq \lambda$ bzw. vom Grad $\leq m+1$ falls $\mu = \lambda$ so, dass

$$(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \mu)[r(x)e^{\lambda x}] = q(x)e^{\lambda x}$$

Nun ist λ k-fache Nullstelle von $Q(X)$ falls $\mu \neq \lambda$ und k-1-fache falls $\mu = \lambda$. Nach Induktionsannahme gibt es also ein Polynom $p(x)$ mit

$$\mathrm{Grad}(p(x)) \leq \begin{cases} \mathrm{Grad}(r(x)) + k & \text{falls } \mu \neq \lambda \\ \mathrm{Grad}(r(x)) + k - 1 & \text{falls } \mu = \lambda \end{cases}$$

so, dass

$$Q(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})[p(x)e^{\lambda x}] = r(x)e^{\lambda x}$$

und es folgt

$$L(p(x)e^{\lambda x}) = P_L(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})[p(x)e^{\lambda x}] = (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \mu)Q(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})[p(x)e^{\lambda x}] = (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \mu)[r(x)e^{\lambda x}] = q(x)e^{\lambda x}$$

Dabei hat $p(x)$ Grad $\leq m+k$ bzw. $\leq m+1+k-1 = m+k$.

Wir schreiben nun

$$p(x) = C_0 + C_1 x + \ldots C_{k-1}x^{x-1} + B_0 x^k + b_1 x^{k+1} + \ldots + B_m x^{k+m}$$

und haben gezeigt

$$L(y_s) = b(x) \quad \text{für } y_s = p(x)e^{\lambda x}$$

Da man für die homogene Gleichuung $L(y) = 0$ die Lösungen $e^{\lambda x}, \ldots, x^{k-1}e^{\lambda x}$ hat, ist

$$y_h = (C_0 + C_1 x + \ldots C_{k-1}x^{x-1})e^{\lambda x}$$

Lösung von $L(y_h) = 0$ also ist

$$\tilde{y}y = y_s - y_h = x^k(B_0 + B_1 x + \ldots + b_m x^m)e^{\lambda x}$$

Lösung von $L(\tilde{y}) = b(x)$. Damit ist für $\lambda \in \mathbb{R}$ der Beweis geführt. Im zweiten und dritten Fall (komplexe λ und B_j) erhält man die reellen Lösungen durch Übergang zu Real bzw. Imaginärteil, im vierten zusätzlich durh Anwendung des Lemmas. $\square$

E.7 Operatormethode

Der vorangehende Beweis führt zu einer Methode zur Bestimmung eine particulären Lösung, die wir hier an einem Beispiel erläutern

$$L(y(= y^{(3)} - 5y^{(2)} + 8y' - 4 = b(x) = xe^{2x}$$

$$P_L(X) = (X-1)(X-2)^2, \quad L(y) = (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - 1)(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - 2)(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - 2)[y]$$

Der Ansatz

$$(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - 1)[(A + Bx)e^{2x}] = xe^{2x}$$

führt zu

$$Be^{2x} + 2(A + Bx)e^{2x} - (A + B)e^{2x} = xe^{2x}$$
$$(A + B)e^{2x} + Bxe^{2x} = xe^{2x}$$

und mit Koeffizientenvergleich zu

$$A + B = 0, \ B = 1, \ A = -1$$

Also betrachten wir nun die DGL

$$(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - 2)(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - 2)[y] = (-1 + x)2^{2x}$$

und machen den Ansatz

$$(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - 2)[(A + Bx + Cx^2)e^{2x}] = (-1 + x)2^{2x}$$

Es folgt

$$(B + 2C)e^{2x} + 2(A + Bx + Cx^2)e^{2x} - 2(A + Bx + Cx^2)e^{2x} = (-1 + x)2^{2x}$$
$$(B + 2C)e^{2x} = (-1 + x)2^{2x}$$

und durch Koeffinzientenvergleich

$$B = -1, C = \frac{1}{2}$$

A ist beliebig und wir am besten $A = 0$ gesetzt. Auch ist zu sehen, warum der Ansatz ein quadratische Polynom erfordert. Nun betrachten wir die DGL

$$(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - 2)[y] = (-x + \frac{1}{2}x^2)^{2x}$$

und machen den Ansatz

$$(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - 2)[(A + Bx + Cx^2 + Dx^3)e^{2x} = (-x + \frac{1}{2}x^2)^{2x}$$

Dieser führt zu

$$(B + 2Cx + 3Cx^2)e^{2x} = (-x + \frac{1}{2}x^2)^{2x}$$

also

$$C = -\frac{1}{2}, \ D = \frac{1}{6}$$

und wir wählen $A = B = 0$. Das Ergebnis ist

$$y = (-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3)e^{2x} = x^2(-\frac{1}{2} + \frac{1}{6}x)e^{2x}$$

F Lineare Systeme mit konstanten Koeffzienten

F.1 Eigenwerte und -vektoren

Wir betrachten Vektoren $\vec{v} \in \mathbb{C}^n$. $\vec{v} \neq \vec{0}$ ist *Eigenvektor* der Matrix A zum *Eigenwert* λ, wenn $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$, äquivalent geschrieben

$$(A - \lambda E)\vec{v} = \vec{0}$$

Satz F.1 *Gegeben $\vec{y}\,' = A\vec{y}$.*

(i) $\vec{y} = e^{\lambda x}\vec{v}$ mit $\vec{v} \neq \vec{0}$ ist Lösung genau dann, wenn $\vec{v}$ Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist.

(ii) Sind die $\vec{v}_j$ unabhängige Eigenvektoren mit Eigenwerten λ_j $(j = 1, \ldots, k)$, so sind

$$e^{\lambda_1 x}\vec{v}_1, \ldots, e^{\lambda_k x}\vec{v}_k$$

unabhängige Lösungen des Systems.

Beweis. Zu (i) $\lambda e^{\lambda}\vec{v} = \vec{y}\,' = Ae^{\lambda x}\vec{v}$ genau dann, wenn $\lambda\vec{v} = A\vec{v}$. Zu (ii) aus

$$C_1 e^{\lambda_1 x}\vec{v}_1 + \ldots + C_k e^{\lambda_k x}\vec{v}_k = \vec{0}$$

folgt mit $x = 0$

$$C_1\vec{v}_1 + \ldots + C_k\vec{v}_k = \vec{0}$$

also $C_1 = \ldots = C_k = 0$. □

Für einen Vektor $\vec{v} = \vec{a} + i\vec{b}$ mit $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ sei der *konjugierte* definiert als

$$\overline{\vec{v}} = \vec{a} - i\vec{b}$$

Satz F.2 *Sei A reell und $\vec{v} \in \mathbb{C}^n$ Eigenvektor zum Eigenwert λ. Dann ist $\overline{\vec{v}}$ Eigenvektor zum Eigenwert $\overline{\lambda}$ und man kann die konjuiert komplexen Lösungen*

$$\vec{Y} = e^{\lambda x}\vec{v}, \quad \overline{\vec{y}} e^{\overline{\lambda} x}\overline{\vec{v}}$$

ersetzen durch

$$\operatorname{Re}\vec{y} = \frac{1}{2}(\vec{y} + \overline{\vec{y}}), \quad \operatorname{Im}\vec{y} = \frac{1}{2i}(\vec{y} - \overline{\vec{y}})$$

Beweis.

$$A\overline{\vec{v}} = \overline{A}\,\overline{\vec{v}} = \overline{A\vec{v}} = \overline{\lambda\vec{v}} = \overline{\lambda}\,\overline{\vec{v}}$$

F.2 Elimination

Ein System mit konstanten Koeffizienten kann man auch dadurch lösen, dass man es in ein System nicht gekoppelter DGLn höherer Ordnung umwandelt (dahinter steckt die *Elementarteilertheorie*). Das sei nur an einem Beispiel erläutert.

$$y_1' = 2y_2, \quad y_2' = -y_1 + 2y_2$$

Durch Differenzieren und Einsetzen

$$y_2'' = -y_1' + 2y_2' = -2y_2 + 2y_2'$$

Charakteristisches Polynom $X^2 - 2X + 2$, also $\alpha = 1 \pm i$.

$$\tilde{y}_2 = K_1 e^{(1+i)x} + K_2 e^{(1-i)x}$$

$$y_2 = \operatorname{Re} \tilde{y}_2 = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x$$

$$y_1 = \int 2y_2 \mathrm{d}x = C_1 e^x(\cos x + \sin x) + C_2 e^x(\sin x - \cos x) + K$$

und $K = 0$ aus dem Fall $y_2 = 0$.

F.3 Hauptvektoren

Bekanntlich gibt es nicht zu jeder (reellen) Matrix eine Basis von Eigenvektoren (in $\mathbb{C}^n$) etwa zu

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Wir verallgemeineren daher: $\vec{v} \neq \vec{0}$ ist ein *Hauptvektor* der Stufe m von A zum Eigenwert λ, falls

$$(A - \lambda E)^m \vec{v} = \vec{0}$$

Im Beispiel sind beide kanonischen Basisvektoren Hauptvektoren vom Eigenwert λ - von Stufe 1 bzw. 2.

Für das Systen $\vec{y}\,' = A\vec{y}$ machen wir nun den Ansatz

$$\vec{y}(x) = e^{\lambda x}\vec{u}(x)$$

also

$$A e^{\lambda x}\vec{u}(x) = \vec{y}\,'(x) = \lambda e^{\lambda x}\vec{u}(x) + e^{\lambda x}\vec{u}\,'(x)$$

d.h.

$$\vec{u}\,'(x) = (A - \lambda E)\vec{u}(x)$$

Aus der Analogie zur DGL $u' = cu$ mit der Lösung

$$u = e^{cx} = \frac{x^0}{0!}c^0 + \frac{x^1}{1!}c^1 + \frac{x^2}{2!}c^2 + \dots$$

raten wir

$$\vec{u}(x) = \frac{x^0}{0!}(A - \lambda E)^0\vec{v} + \frac{x^1}{1!}(A - \lambda E)^1\vec{v} + \frac{x^2}{2!}(A - \lambda E)^2\vec{v} + \dots + \frac{x^k}{k!}(A - \lambda E)^k\vec{v} + \dots$$

mit einem passenden Vektor $\vec{v}$. Eine tatsächliche Lösung ergibt sich, falls $\vec{v}$ Hauptvektor ist: bei Stufe m

$$\vec{u}(x) = \frac{x^0}{0!}(A-\lambda E)^0\vec{v} + \frac{x^1}{1!}(A-\lambda E)^1\vec{v} + \frac{x^2}{2!}(A-\lambda E)^2\vec{v} + \ldots + \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}(A-\lambda E)^{m-1}\vec{v}$$

also Lösung des DGL-Systems

$$\vec{y} = e^{\lambda x}(\frac{x^0}{0!}(A-\lambda E)^0\vec{v} + \frac{x^1}{1!}(A-\lambda E)^1\vec{v} + \frac{x^2}{2!}(A-\lambda E)^2\vec{v} + \ldots + \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}(A-\lambda E)^{m-1}\vec{v})$$

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

hat charakteristisches Polynom (Entwickeln von $\det(A - XE)$ nach erster Spalte

$$(2-X)[(3-X)(1-X)+1] = (2-X)(X^2-4X+4) = (2-X)^3$$

also Eigenwert $\lambda = 2$ mit algebraischer Vielfachheit 3.

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

hat Rang 1, also keine Basis von Eigenvektoren. Da

$$(A-2E)^2 = 0$$

suchen wir einen Hauptvektor der Stufe 2. Das ist ganz einfach: es darf nur kein Eigenvektor sein! Wir wählen also zum Beispiel

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{in der Tat } (A-2E)\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

und bekommen einen Hauptvektor der Stufe 1 (d.h. einen Eigenvektor) geschenkt

$$(A-2E)\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit haben wir schon 2 unabhängige Lösungen. Für die dritte wählen wir einen von $(A-2E)\vec{v}$ unabhängigen Eigenvektor, z.B. den ersten kanonischen Basisvektor. Damit haben wir eine Basis von Hauptvektoren des $\mathbb{C}^3$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (A-2E)\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und damit die allgemeine Lösung des Systems

$$y = e^{2x}(C_1 x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$$

In diesem Beispiel ist der erste Basisvektor fast beliebig (nur kein Eigenvektor!), der dritte von ziemlich beliebig, aber der zweite bis aus einen Skalar eindeutig (weil

$$(A - 2E) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x - y) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Daher die

Warnung. Viele, auch sonst solide Bücher, geben als Rezept an, dass man erst eine eine Maximalzahl unabhängiger Eigenvektoren $\vec{w}$ bestimmen soll, und dann Hauptvektoren zweiter Stufe aus $(A - \lambda)\vec{x} = \vec{w}$ usw. Dieses Rezept funktioniert nur in Ausnahmefällen und ist auch da meist mit unnötigem Aufwand verbunden.

Satz F.3 *Es seien die $\vec{v}_k$, $(k = 1, \ldots, s)$, Hauptvektoren der Stufe m_k der $n \times n$-Matrix A zum Eigenwert λ_k. Ferner seien die (Eigenvektoren)*

$$(*) \quad (A - \lambda_1)^{m_1 - 1}\vec{v}_1, \ldots, (A - \lambda_s)^{m_s - 1}\vec{v}_s$$

linear unabhängig und $n = m_1 + \ldots + m_s$. Dann gilt

(i) Eine Basis von Hauptvektoren in $\mathbb{C}^n$ is gegeben durch

$$(A - \lambda_k E)^j \vec{v}_k \quad j = 0, \ldots, m_{k-1},\ k = 1, \ldots, s$$

(ii) Ein Fundamentalsystem von Lösungen des DGL-Systems $\vec{y}\,' = A\vec{y}$ ist gegeben durch die folgenden Funktionen $(j = 0, \ldots, m_k - 1,\ k = 1, \ldots, s)$

$$\vec{y} = e^{\lambda_k x}(\frac{x^0}{0!}(A - \lambda_k E)^0 \vec{v}_k + \frac{x^1}{1!}(A - \lambda_k E)^1 \vec{v}_k + \frac{x^2}{2!}(A - \lambda_k E)^2 \vec{v}_k + \ldots + \frac{x^{j-1}}{(j-1)!}(A - \lambda_E)^{j-1}\vec{v}_k)$$

Ist A reell, so erhält man ein reelles Fundamentalsystem indem man jedes Paar konjugierter Lösungen $\vec{y}$, $\overline{\vec{y}}$ durch $\mathrm{Re}\,\vec{y}$, $\mathrm{Im}\,\vec{y}$ ersetzt.

Die Voraussetzungen des Satzes können stets erfüllt werden.

Beweis: Zu (i). Es ist zu zeigen, dass aus der in $(*)$ gegebenen Unabhängigkeit die Unabhängigkeit aller beteiligten Vektoren folgt. Das geht durch Induktion über die Summe der m_k. Sei z.B. $m_1 \neq 1$ und sei eine Linearkombination gegeben, die $\vec{0}$ ergibt. Wir multiplizieren $(*)$ mit $(A - \lambda_1 E)$. Für jedes k mit $\lambda_k = \lambda_1$ haben wir dann

$$(A - \lambda_k E)\vec{v}_k, \ldots, (A - \lambda_k E)^{m_k - 2}(A - \lambda_k E)\vec{v}_k,\ (A - \lambda_k E)^{m_k - 1}(A - \lambda_k E)\vec{v}_k = \vec{0}$$

d.h. wir können die Induktionsvorausetzung anwenden, indem wir alle $\vec{v}_k$ durch $(A - \lambda_1 E)\vec{v}_k$ ersetzen. Also sind alle Koeffizenten $= 0$ bis auf die, die bei den $(A - \lambda_k)^{m_k - 1}\vec{v}_k$ mit $\lambda_k = \lambda_1$ standen. Dann sind die aber nach $(*)$ auch $= 0$.

(ii) folgt dann, wie oben gezeigt - die Unabhängigkeit mit $x = 0$. Hat man eine Basis von Hauptvektoren wie in (i) und transformiert A auf diese Basis, so erhält man die *Jordan-Normalform* von A. Damit geht es um die Aussage, dass es zu jedem A eine Transformation auf Jordan-Normalform gibt. Dazu müssen wir auf die einschlägige Literatur verweisen. $\square$