

A Beispiel: Lineare DGL

A.1 Homogene DGL

$$y' = xy$$

Ansatz:

$$y = Ke^{P(x)}$$

Es folgt

$$y' = Ke^{P(x)}P'(x), \quad P'(x) = x, \quad P(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$$

Allgem. Lsg.

$$y_h = Ke^{\frac{1}{2}x^2}$$

Alternativ: Trennung der Veränderlichen

Singuläre Lösung $y = 0$. Für $y \neq 0$:

$$\frac{\partial y}{\partial y} = xy \Leftrightarrow \frac{1}{y} \frac{\partial y}{\partial x} = x \Leftrightarrow \frac{1}{y} dy = \frac{1}{y} \frac{\partial y}{\partial x} dx = x dx$$

$$\Leftrightarrow \ln |y| = \int \frac{1}{y} dy = x dx = \frac{1}{2}x^2 + C$$

1. Fall $y > 0$

$$\ln y = \frac{1}{2}x^2 + C, \quad y = e^{\frac{1}{2}x^2 + C} = e^C e^{\frac{1}{2}x^2}$$

2. Fall $y < 0$

$$\ln -y = \frac{1}{2}x^2 + C, \quad y = e^{\frac{1}{2}x^2 + C} = -e^C e^{\frac{1}{2}x^2}$$

A.2 Inhomogen lineare DGL

$$y' = xy + x$$

Variation der Konstanten. Ansatz

$$y_s = K(x)e^{\frac{1}{2}x^2}$$

$$\text{Ableiten: } y'_s = K'(x)e^{\frac{1}{2}x^2} + K(x)xe^{\frac{1}{2}x^2}$$

$$\text{Einsetzen in DGL: } y'_s = xK(x)e^{\frac{1}{2}x^2} + x$$

$$\text{Gleichsetzen: } K'(x)e^{\frac{1}{2}x^2} = x$$

$$\text{Auflösen: } K'(x) = xe^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$\text{Integrieren: } K(x) = \int xe^{-\frac{1}{2}x^2} = -e^{-\frac{1}{2}x^2} + C$$

Wähle $C = 0$. Rückeinsetzen in Ansatz

$$\text{Spezielle Lösung: } y_s = K(x)e^{\frac{1}{2}x^2} = -e^{-\frac{1}{2}x^2} e^{\frac{1}{2}x^2} = -1$$

$$\text{Probe: } y'_s = 0 = x(-1) + x$$

Allgemeine Lsg.

$$y = y_h + y_s = K e^{\frac{1}{2}x^2} - 1$$

Alternativ: Ansatz vom Typ der rechten Seite:

$$y_s = Ax + B$$

$$\text{Ableiten: } y'_s = A$$

$$\text{Einsetzen in DGL: } y'_s = x(Ax + B) + x = Ax^2 + (B + 1)x$$

$$\text{Gleichsetzen: } A = Ax^2 + (B + 1)x$$

$$\text{Koeffizientenvergleich: } A = 0, B = -1$$

$$\text{Spezielle Lösung: } y_s = -1$$

A.3 Anfangswertproblem

(AWP)

$$\text{AWP } y' = xy, \quad y(0) = y_0 = K e^{\frac{1}{2}0^2} \Leftrightarrow K = y_0$$

$$y(1) = y_0 = K e^{\frac{1}{2}1^2} \Leftrightarrow K = y_0 e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{AWP } y' - xy + x, \quad y(0) = y_0 = K e^{\frac{1}{2}0^2} - 1 \Leftrightarrow K = y_0 + 1$$

$$y(1) = y_0 = K e^{\frac{1}{2}1^2} - 1 \Leftrightarrow K = (y_0 + 1)e^{-\frac{1}{2}}$$

B Differentiale

B.1 Diffeentiale

Für eine auf $[a, b]$ definierte und differenzierbare Funktion $y = f(t)$ ist das *Differential* an der Stelle $p \in [a, b]$ die homogen lineare Funktion

$$df(p, dt) = \frac{\partial f}{\partial t}(p) \cdot dt = \frac{\partial y}{\partial t} dt \quad dt \in p - a \leq dt \leq b, \quad dt \neq 0$$

oder wenn man die Stelle p nicht explizit erwähnt

$$dy = \frac{\partial y}{\partial t} dt.$$

Das Differential an der Stelle p ist natürlich schon dann bekannt, wenn man es für ein einziges $dt \neq 0$ kennt.

Seien nun $x = x(t)$ und $y = y(t)$ auf $[a, b]$ differenzierbar und sei y eine differenzierbare Funktion von x , also nach der Kettenregel

$$y(t) = y = y(x) = y(x(t)), \quad \frac{\partial y}{\partial t}(p) = \frac{\partial y}{\partial x}(x(p)) \cdot \frac{\partial x}{\partial t}(p)$$

$$dy(p, dt) = \frac{\partial y}{\partial t}(p) \cdot dt = \frac{\partial y}{\partial x}(x(p)) \cdot \frac{\partial x}{\partial t}(p) \cdot dt = \frac{\partial y}{\partial x}(x(p)) \cdot dx(p, dt)$$

d.h. wir können $dy(p)$ auch als Differential bzgl. x verstehen. Dementsprechend haben wir die folgende *Konsistenzvoraussetzung* für den problemlosen Umgang mit Differentialen

* Alle betrachteten Größen sind stetig differenzierbare Funktionen einer vorgegebenen unabhängigen Variablen $t \in [a, b]$.

Dann gilt unzweideutig

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x} dx$$

wie auch immer $y = y(x)$ differenzierbare Funktion von x , und

$$\frac{\partial y}{\partial x}(p) = \frac{dy}{dx}(p) \quad \text{falls } \frac{\partial x}{\partial t}(p) \neq 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}(p) = 0 \quad \text{falls } \frac{\partial x}{\partial t}(p) = 0$$

B.2 Intergration

Der folgende Satz fasst die üblichen Integrationsregeln zusammen und zeigt, dass das sogenannte "formale Rechnen" legitim und sinnvoll ist, wenn die Konsistenzbedingung für Differentiale erfüllt ist. Der Vorteil dieser Rechnung ist die intuitive Notation und die Option, die Argumentwerte weitgehend zu unterdrücken (da diese über die Abhängigkeit von t gekoppelt sind).

Satz B.1 Seien $x = x(t)$, $y = y(t)$ und $z = z(t)$ auf $[a, b]$ differenzierbar und $f(x)$, $g(y)$, $h(z)$ stetige Funktionen auf den jeweiligen Wertebereichen. Für die Differentiale gelte

$$f(x(p))dx(p) = cg(y(p))dy(p) + h(z(p))dz(p) \quad \text{für alle } p \in [a, b]$$

$$\text{kurz } f(x)dx = cg(y)dy + h(z)dz$$

Dann gilt: Für alle Stammfunktionen F , G , H von f , g bzw. h gibt es eine Konstante C mit

$$F(x(t)) = cG(y(t)) + H(z(t)) \quad \text{für alle } t \in [a, b]$$

kurz

$$\int f(x)dx = c \int g(y)dy + \int h(z)dz + C$$

Beweis. Nach Voraussetzung haben wir

$$f(x) \frac{\partial x}{\partial t} dt = cg(y) \frac{\partial y}{\partial t} dt + h(z) \frac{\partial z}{\partial t} dt$$

also

$$\phi(t) := f(x) \frac{\partial x}{\partial t} = cg(y) \frac{\partial y}{\partial t} + h(z) \frac{\partial z}{\partial t}$$

Dann

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} &= \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = f(x) \frac{\partial x}{\partial t} = \phi(t) \\ \frac{\partial(cG + H)}{\partial t} &= c \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial t} = \\ &= c \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = cg(y) \frac{\partial y}{\partial t} + h(z) \frac{\partial z}{\partial t} = \phi(t) \end{aligned}$$

C Satz von Picard-Lindelöf

Satz C.1 $f(x, y)$ sei stetig auf dem Streifen $S = \{(x, y) \mid x \in [x_0 - b, x_0 + a]\}$ und genüge dort der Lipschitzbedingung

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

Dann hat das AWP $y' = f(x, y)$, $y_0 = y(x_0)$ eine eindeutig bestimmte Lösung $y : [x_0 - b, x_0 + a] \rightarrow \mathbb{R}$.

Integralgleichung. Das AWP ist äquivalent zu

$$(*) \quad y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

In der Tat, nach dem Hauptsatz

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^x y' dt = \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

Umgekehrt ist das Integral als Funktion der oberen Grenze differenzierbar und es gilt

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \right) = f(x, y(x))$$

Picard-Iteration. Näherungslösungen der Integralgleichung (*) werden durch Iteration bestimmt

$$y_{[0]}(x) = y_0, \quad y_{[n+1]}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{[n]}(t)) dt$$

Das können wir auch so notieren

$$y_{[0]} = y_0, \quad y_{[n+1]} = T(y_{[n]})$$

mit dem Operator

$$T(y) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

Dass y eine Lösung der Integralgleichung (*) ist, bedeutet dann gerade, dass y ein *Fixpunkt* von T ist

$$T(y) = y$$

Beispiel: $y' = y$, $y(0) = 1$

$$y_{[0]} = 1, \quad y_{[n]} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k$$

$$y_{[n+1]} = 1 + \int_{x_0}^x \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k dt = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} x^k$$

Die Lösung von (*) wird dann als Limes der Näherungen bestimmt

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{[n]}(x)$$

im Beispiel also $y(x) = e^x$.

Banachscher Fixpunktsatz. Wir beschreiben zunächst ein analoges Vorgehen für eine Abbildung $T : G \rightarrow G$, wobei $G \subseteq \mathbb{R}^n$, z.B. $n = 2$, abgeschlossen. Wir setzen voraus, dass T *kontrahierend* ist, d.h. es gibt Konstante $K < 1$ mit

$$\|T(x) - T(x')\| \leq K\|x - x'\| \quad \text{für alle } x, x' \in G$$

Insbesondere ist T Lipschitz-stetig. Wir behaupten nun

- Es gibt ein eindeutig bestimmtes $x_\infty \in G$ mit $T(x_\infty) = x_\infty$ (Fixpunkt) und für jedes $x_0 \in G$ konvergiert die rekursiv definierte Folge $x_{n+1} = T(x_n)$ gegen x_∞ .

Beweis. Die x_n bilden eine Cauchy-Folge, da für $n < m$

$$\|x_n - x_m\| \leq \sum_{k=n}^{m-1} \|x_k - x_{k+1}\| \leq \sum_{k=n}^m K^k \|x_0 - x_1\| \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty$$

wie man von der geometrischen Reihe weiss. Also gibt es

$$x_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

und wegen der Stetigkeit folgt

$$T(x_\infty) = x_\infty$$

Ist nun auch $T(x) = x$, so

$$\|x - x_\infty\| = \|T(x) - T(x_\infty)\| \leq K\|x - x_\infty\|$$

also $x = x_\infty$ da $K < 1$. \square

Wir betrachten nun den Funktionenraum

$$G = \{y \mid y : [x_0, x_0 + a] \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig} \}$$

mit dem Abstand

$$\|y_1 - y_2\| = \max\{|y_1(x) - y_2(x)| \mid x \in [x_0, x_0 + a]\}$$

Der obige Beweis gilt hier ganz entsprechend:

$$y_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

bedeutet hier, dass die Funktionenfolge y_n *gleichmäßig* gegen die Funktion y konvergiert. Insbesondere gibt es zu jeder Cauchy-Folge y_n eine stetige Funktion y , die der eindeutig bestimmte Limes dieser Folge ist. Der Fixpunktsatz und sein Beweis übertragen sich Wort für Wort.

Beim Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf setzen wir nun voraus, dass $aL = K < 1$ - indem wir das Intervall passend einschränken - und zeigen, dass der Operator T kontrahierend ist

$$\|T(y_1) - T(y_2)\| \leq \int_{x_0}^x |f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))| dt \leq \int_{x_0}^x L|y_1(t) - y_2(t)| dt$$

$$\leq \int_{x_0}^x L \|y_1 - y_2\| dt \leq aL \|y_1 - y_2\| = K \|y_1 - y_2\|$$

Damit können wir den Fixpunktsatz anwenden, d.h. es gibt ein eindeutig bestimmtes y_∞ mit

$$T(y_\infty) = y_\infty$$

das bedeutet aber dasselbe, wie die Lösung der Integralgleichung (*) und damit des gegebenen AWP.

Für beliebiges a zerlegen wir $[x_0, x_0 + a]$ in Teilintervalle $[x_k, x_{k+1}]$, auf die wir obigen Beweis anwenden können (d.h. $(x_{k+1} - x_k)L < 1$) und lösen iterativ die AWP

$$\text{AWP}_k : \quad y' = f(x, y), \quad y(x_k) = u_k, \quad y : [x_k, x_{k+1}] \rightarrow \mathbb{R}$$

wobei $u_0 = y_0$ und $u_k = y(x_k)$ für die Lösung y des AWP_{k-1} . Entsprechend verfahren wir für $[x_0 - b, x_0]$. Setzt man die Lösungen zusammen, so erhält man die Iterationsfolge der Näherungslösungen nach Picard

$$y_{[0]}(x) = y_0, \quad y_{[n+1]}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{[n]}(t)) dt, \quad x \in [x_0 - b, x_0 + a]$$

und die Lösung des AWP

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{[n]}(x), \quad x \in [x_0 - b, x_0 + a]$$

Ein Problem besteht jedoch darin, die Integrale zu bestimmen.

D Systeme von DGLn erster Ordnung

D.1 Vektorfunktionen

Sei $\vec{y} = \vec{y}(x)$ eine *Vektorfunktion*, d.h. Abbildung $\vec{y} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y^{[1]}(x) \\ \vdots \\ y^{[n]}(x) \end{pmatrix}$$

Ableitung und Integration erfolgen komponentenweise

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} y^{[1]'}(x) \\ \vdots \\ y^{[n]'}(x) \end{pmatrix}, \quad \int_a^b \vec{y}(x) dx = \begin{pmatrix} \int_a^b y^{[1]}(x) dx \\ \vdots \\ \int_a^b y^{[n]}(x) dx \end{pmatrix}$$

D.2 Systeme

Ein *System* von n DGLn erster Ordnung wird gegeben durch Abbildungen $f_i : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} y^{[1]'} &= f^{[1]}(x, y^{[1]}, \dots, y^{[n]}) \\ &\vdots \\ y^{[n]'} &= f^{[n]}(x, y^{[1]}, \dots, y^{[n]}) \end{aligned}$$

in Kurzschreibweise mit $\vec{f}: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\vec{y}' = \vec{f}(x, \vec{y})$$

Aus einer DGL $y'' = f(x, y, y')$ wird durch $y^{[1]} = y, y^{[2]} = y'$ das System

$$\begin{aligned} y^{[1]'} &= y^{[1]} \\ y^{[2]'} &= f(x, y^{[1]}, y^{[2]}) \end{aligned}$$

D.3 Picard-Lindelöf

Satz D.1 Existenz und Eindeutigkeit. Ist $\vec{f}(x, \vec{y})$ auf $I \times \mathbb{R}^n$ stetig und genügt einer Lipschitzbedingung

$$\|\vec{f}(x, \vec{y}_1) - \vec{f}(x, \vec{y}_2)\| \leq L \|\vec{y}_1 - \vec{y}_2\|$$

(z.B. falls \vec{f} nach den y_i stetig partiell differenzierbar ist) so hat das

$$AWP \quad \vec{y}' = \vec{f}(x, \vec{y}), \quad \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$$

eine eindeutig bestimmte Lösung $\vec{y}: I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Insbesondere besagt die Eindeutigkeit

Sind \vec{y}_1 und \vec{y}_2 Lösungen des Systems $\vec{y}' = \vec{f}(x, \vec{y})$ und gilt $\vec{y}_1(x_0) = \vec{y}_2(x_0)$ für ein $x_0 \in I$, so gilt $\vec{y}_1(x) = \vec{y}_2(x)$ für alle $x \in I$

Der Beweis ergibt sich wie für DGLn erster Ordnung.

D.4 Systeme linearer DGLn erster Ordnung

Sind die Funktionen f_i von der Form

$$f_i(x, y^{[1]}, \dots, y^{[n]}) = a_{i1}(x)y^{[1]} + \dots + a_{in}(x)y^{[n]} + b_i(x)$$

so spricht man von einem linearen System und kann es schreiben als

$$(*) \quad \vec{y}' = A(x)\vec{y} + \vec{b}(x) \quad \text{mit} \quad A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

Das zugehörige *homogene* System ist

$$(**) \quad \vec{y}_h' = A(x)\vec{y}_h$$

Wie bei den linearen DGLn. erster Ordnung zeigt man

Satz D.2 Ist \vec{y}_s eine (sog. spezielle) Lösung von (*) so ist \vec{y} eine Lösung von (*) genau dann, wenn $\vec{y} = \vec{y}_h + \vec{y}_s$ mit einer Lösung \vec{y}_h des homogenen Systems (**).

D.5 Fundamentalsystem von Lösungen

Lineare Algebra

- Vektorraum V : $\vec{v} + \vec{w}$, $r\vec{v}$ ($r \in \mathbb{R}$)
- Linearkombination $\vec{v} = r_1\vec{v}_1 + \dots + r_n\vec{v}_n$
- $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ erzeugen V \Leftrightarrow jedes $\vec{v} \in V$ ist Linearkombination
- $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ linear unabhängig $\Leftrightarrow \vec{0} = r_1\vec{v}_1 + \dots + r_n\vec{v}_n$ nur mit $r_1 = \dots = r_n = 0$
- $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ Basis von V \Leftrightarrow linear unabhängig und erzeugend
- Ist V von endlich vielen Vektoren erzeugt, so hat V eine Basis
- Je zwei Basen von V haben dieselbe Elementanzahl $n = \dim V$
- Ist $n = \dim V < \infty$, so sind für $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in V$ äquivalent
 - $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ ist Basis von V
 - $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ sind unabhängig
 - $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ erzeugen V
 - Jedes $\vec{v} \in V$ hat eindeutige Darstellung $\vec{v} = r_1\vec{v}_1 + \dots + r_n\vec{v}_n$
- $\dim \mathbb{R}^n = n$

Ein *Linearkombination* von Vektorfunktionen $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m$ mit $\vec{y}_j : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist von der Form

$$\vec{y} = c_1\vec{y}_1(x) + \dots + c_m\vec{y}_m(x) \quad \text{für alle } x \in I$$

mit Konstanten c_1, \dots, c_m in \mathbb{R} . Es gilt

- Jede Linearkombination von Lösungen des homogenen Systems (**) ist ebenfalls Lösung von (**).

In der Tat

$$\vec{y}' = c_1\vec{y}_1' + \dots + c_m\vec{y}_m' = c_1A\vec{y}_1 + \dots + c_mA\vec{y}_m = A(c_1\vec{y}_1 + \dots + c_m\vec{y}_m) = A\vec{y}$$

Somit bilden die Lösungen von (**) einen reellen Vektorraum V und es stellt sich die Frage nach den Basen dieses Vektorraums. Hier sind $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m$ *linear abhängig* genau dann, wenn es c_1, \dots, c_m gibt, die nicht alle = 0 sind, sodass $c_1\vec{y}_1(x) + \dots + c_m\vec{y}_m(x) = \vec{0}$ für alle $x \in I$. Andernfalls sind sie *linear unabhängig*. Eine Basis von V , auch *Fundamentalsystem* von Lösungen von (**), besteht aus m unabhängigen Lösungen $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m$ so, dass jede andere Lösung eine Linearkombination von diesen ist.

Satz D.3 Zu jedem homogenen System (**) von n linearen DGLn erster Ordnung gibt es ein Fundamentalsystem $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$ und jedes Fundamentalsystem besteht aus n Lösungen. Für Lösungen $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$ von (**) sind die folgenden Aussagen äquivalent

- (1) $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$ bilden ein Fundamentalsystem
- (2) Es gibt $x_0 \in I$ so, dass die Vektoren $\vec{y}_1(x_0), \dots, \vec{y}_n(x_0)$ in \mathbb{R}^n linear unabhängig sind
- (2') Es gibt $x_0 \in I$ so, dass $\det(\vec{y}_1(x_0), \dots, \vec{y}_n(x_0)) \neq 0$
- (3) Für alle $x_0 \in I$ sind die Vektoren $\vec{y}_1(x_0), \dots, \vec{y}_n(x_0)$ in \mathbb{R}^n linear unabhängig
- (3') Für alle $x_0 \in I$ gilt $\det(\vec{y}_1(x_0), \dots, \vec{y}_n(x_0)) \neq 0$
- (4) Jede Lösung \vec{y} von (**) ist Linearkombination der $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$

Beweis. Ist I ein kompaktes Intervall, so können wir den Satz von Picard-Lindelöf anwenden

$$\|A(x)\vec{y}_1 - A(x)\vec{y}_2\| = \|A(x)(\vec{y}_1 - \vec{y}_2)\| \leq L\|\vec{y}_1 - \vec{y}_2\|$$

mit $L = \max\{|a_{ij}(x)| \mid i, j \leq n, x \in I\}$. Andererseits können wir zu jedem x_0 und n unabhängigen Vektoren $\vec{y}_{10}, \dots, \vec{y}_{n0}$ in \mathbb{R}^n diese als Anfangswerte vorgeben und erhalten somit n unabhängige Lösungen $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$: \vec{y}_j ist die Lösung des

$$AWP \quad \vec{y}' = A(x)\vec{y}, \quad \vec{y}(x_0) = \vec{y}_{j0}$$

Ist \vec{y} nun eine weitere Lösung von (**), so gibt es Konstanten c_1, \dots, c_n in \mathbb{R} mit

$$\vec{y}(x_0) = c_1\vec{y}_{10} + \dots + c_n\vec{y}_{n0} = c_1\vec{y}_1(x_0) + \dots + c_n\vec{y}_n(x_0)$$

da ja $\vec{y}_{10}, \dots, \vec{y}_{n0}$ Basis von \mathbb{R}^n ist. Aus der Eindeutigkeit folgt

$$\vec{y}(x) = c_1\vec{y}_1(x) + \dots + c_n\vec{y}_n(x) \quad \text{für alle } x$$

Das beweist auch, dass (1) aus (2) folgt. Ebenfalls aus der Eindeutigkeit folgt sofort

- Sind die \vec{y}_j Lösungen von (**) und $\vec{y}(x_0) = c_1\vec{y}_1(x_0) + \dots + c_m\vec{y}_m(x_0)$ für ein $x_0 \in I$ so gilt $\vec{y}(x) = c_1\vec{y}_1(x) + \dots + c_m\vec{y}_m(x)$ für alle $x \in I$.

Also folgt (2) aus (2'). Dass (2) und (2') sowie (3) und (3') äquivalent sind, weiss man aus Mathematik II, Lineare Algebra. Ebenso, dass alle Basen dieselbe Elementanzahl n haben und dass dann n Vektoren, die den Raum aufspannen, immer schon eine Basis bilden. \square

D.6 Lineare DGL n-ter Ordnung

Eine lineare DGL n-ter Ordnung ist von der Form

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \dots + a_n(x)y^{(n)} = b(x)$$

Diese übersetzen wir in ein System vermöge

$$y^{[1]} = y, \quad y^{[2]} = y', \quad \dots, \quad y^{[n]} = y^{(n-1)}$$

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_0(x)}{a_n(x)} & -\frac{a_1(x)}{a_n(x)} & \dots & -\frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)} & \end{pmatrix} \vec{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{b(x)}{a_n(x)} \end{pmatrix}$$

Damit können wir (für $a_n(x) \neq 0$) die Ergebnisse über lineare Systeme erster Ordnung anwenden. Dem homogenen System entspricht dabei die homogene DGL

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \dots + a_n(x)y^{(n)} = 0$$

Für n Lösungen y_1, \dots, y_n dieser homogenen DGL bilden wir entsprechend (2') und (3') des Satzes die *Wronski-Matrix*

$$W(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

$\det W(x)$ heisst auch *Wronski-Determinante*. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent

- (i) y_1, \dots, y_n ist ein Fundamentalsystem
- (ii) $\det W(x_0) \neq 0$ für ein $x_0 \in I$
- (iii) $\det W(x) \neq 0$ für alle $x \in I$
- (iv) Jede Lösung y der homogenen DGL ist Linearkombination der y_1, \dots, y_n

Insbesondere ist die Existenz mindestens eines Fundamentalsystems y_1, \dots, y_n gesichert und die Lösungen der inhomogenen DGL ergeben sich aus einer speziellen Lösung y_s als

$$y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n + y_s$$

D.7 Variation der Konstanten

Für das System

$$\vec{y}'(x) = A(x)\vec{y}(x) + \vec{b}(x)$$

sei ein Fundamentalsystem $\vec{y}_1(x), \dots, \vec{y}_n(x)$ von Lösungen des homogenen Systems $\vec{y}'(x) = A(x)\vec{y}(x)$ gegeben. Wir schreiben das Fundamentalsystem die Spalten einer Matrix

$$Y(x) = (\vec{y}_1(x) \dots \vec{y}_n(x))$$

Dann ist $Y(x)$ für alle x invertierbar, da $\det Y(x) \neq 0$. Dass die \vec{y}_j Lösungen von $\vec{y}'(x) = A(x)\vec{y}(x)$ sind, drückt man mithilfe des Matrizenprodukts auch so aus

$$Y'(x) = A(x)Y(x)$$

Wie machen nun für eine Lösung \vec{y}_s des inhomogenen Systems $\vec{y}'(x) = A(x)\vec{y}(x) + \vec{b}(x)$ den Ansatz

$$\vec{y}_s = C_1(x)\vec{y}_1(x) + \dots + C_n(x)\vec{y}_n(x) = Y(x)\vec{C}(x)$$

mit

$$\vec{C}(x) = \begin{pmatrix} C_1(x) \\ \vdots \\ C_n(x) \end{pmatrix}$$

In der folgenden Rechnung ist die Variable x nicht mitgeschrieben. Nach der Produktregel folgt aus dem Ansatz

$$\vec{y}_s' = Y'\vec{C} + Y\vec{C}' = AY\vec{C} + Y\vec{C}'$$

da, wie oben bemerkt, $Y' = AY$ ausdrückt, dass die \vec{y}_j das homogene System lösen. Dass $\vec{y}_s = Y\vec{C}$ Lösung des inhomogenen Systems ist, bedeutet

$$\vec{y}_s' = A\vec{y}_s + \vec{b} = AY\vec{C} + \vec{b}$$

Es folgt durch Gleichsetzung

$$Y\vec{C}' = \vec{b} \text{ d.h. } Y(x)\vec{C}'(x) = \vec{b}(x)$$

d.h. ein lineares Gleichungssystem für die $C_j'(x)$. Ist das DGL-System aus einer linearen DGL

$$a_n(x)y^{(n)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = \underline{b(x)}$$

n-ter Ordnung hergeleitet, so hat man das Gleichungssystem

$$W(x) \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ \vdots \\ C_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \frac{b(x)}{a_n(x)} \end{pmatrix}$$

Das lineare Gleichungssystem löst man durch Gaußsches Eliminationsverfahren oder durch Inversion von $Y(x)$

$$\vec{C}'(x) = Y^{-1}(x)\vec{b}(x)$$

Anschliessend bestimmt man die $C_j(x)$ durch Integration der $C_j'(x)$ und hat dann die spezielle Lösung

$$\vec{y}_s = C_1(x)\vec{y}_1(x) + \dots + C_n(x)\vec{y}_n(x)$$

des inhomogenen Systems. Die allgemeine Lösung ist dann

$$\vec{y} = C_1\vec{y}_1(x) + \dots + C_n(x)\vec{y}_n(x) + \vec{y}_s \quad C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R}$$

D.8 Reduktion der Ordnung

Gegeben eine homogen lineare DGL n-ter Ordnung

$$L(y) = a_n(x)y^{(n)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

Ist eine Lösung $u = u(x)$ bekannt, so macht man den *Produktansatz* $y = vu$ und erhält für $w = v'$ eine DGL $M(w) = 0$ der Ordnung $n - 1$: durch Ableiten nach der Produktregel

$$y^{(m)} = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} v^{(k)} u^{(m-k)}$$

und Einsetzen in L

$$L(y) = L(vu) = vL(u) + M(v')$$

also

$$(*) \quad L(vu) = 0 \Leftrightarrow M(w) = 0$$

Ist w_2, \dots, w_n ein Fundamentalsystem für $M(w) = 0$ und hat man durch Integration v_i bestimmt mit

$$v'_2 = w_2, \dots, v'_n = w_n$$

so erhält man ein Fundamentalsystem für $L(y) = 0$

$$y_1 = u \cdot 1 = u, \quad y_2 = uv_2, \dots, y_n = uv_n$$

Wegen (*) sind dies Lösungen und aus

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n = 0$$

folgt durch Division durch u

$$C_1 + C_2 v_2 + \dots + C_n v_n = 0$$

und durch Differenzieren

$$C_2 w_2 + \dots + C_n w_n = 0$$

also wegen Unabhängigkeit der w_2, \dots, w_n nun $C_2 = \dots = C_n = 0$ und dann auch $C_1 = 0$.

E Lineare DGLn mit konstanten Koeffizienten

E.1 Charakteristisches Polynom

Gegeben die homogene DGL

$$L(y) = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$$

mit konstanten Koeffizienten a_i . Das Polynom

$$P_L(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$$

heißt das *charakteristische Polynom* der DGL.

Satz E.1

$$L(y) = 0 \quad \text{für } y = x^{k-1}e^{\lambda x}$$

genau dann, wenn λ mindestens k -fache Nullstelle von $P_L(X)$ ist.

Beweis durch Induktion über k . In Falle $k = 1$ haben wir

$$y = e^{\lambda x}, \quad y^{(l)} = \lambda^l e^{\lambda x}$$

$$\begin{aligned} L(e^{\lambda x}) &= \lambda^n e^{\lambda x} + a_{n-1} \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + \dots + a_1 \lambda e^{\lambda x} + a_0 e^{\lambda x} \\ &= (\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0) e^{\lambda x} = P_L(\lambda) e^{\lambda x} \end{aligned}$$

also

$$L(e^{\lambda x}) = 0 \Leftrightarrow P_L(\lambda) = 0$$

Wir fassen nun L als *Differentialoperator* auf

$$\begin{aligned} L(y) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n(y) + a_{n-1} \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1}(y) + \dots + a_1 \left(\frac{d}{dx}\right)^1(y) + a_0(y) \\ &= \left(\left(\frac{d}{dx}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} + \dots + a_1 \left(\frac{d}{dx}\right)^1 + a_0\right)(y) = P_L\left(\frac{d}{dx}\right)(y) \end{aligned}$$

Sei nun $k > 1$, also

$$P_L(X) = Q(X)(X - \lambda)$$

Es folgt

$$P_L\left(\frac{d}{dx}\right)(y) = Q\left(\frac{d}{dx}\right)\left[\left(\frac{d}{dx} - \lambda\right)(y)\right]$$

wobei $Q(X) = P_M(X)$ für eine DGL $M(Y) = 0$ der Ordnung $n - 1$. Für $y = x^{k-1}e^{\lambda x}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} P_L\left(\frac{d}{dx}\right)(y) &= Q\left(\frac{d}{dx}\right)\left[\left(\frac{d}{dx} - \lambda\right)(x^{k-1}e^{\lambda x})\right] \\ &= Q\left(\frac{d}{dx}\right)\left[(k-1)x^{k-2}e^{\lambda x} + x^{k-1}\lambda e^{\lambda x} - \lambda x^{k-1}e^{\lambda x}\right] = (k-1)Q\left(\frac{d}{dx}\right)[x^{k-2}e^{\lambda x}] \end{aligned}$$

Nach Induktionsannahme gilt

$$M(x^{k-2}e^{\lambda x}) = Q\left(\frac{d}{dx}\right)[x^{k-2}e^{\lambda x}] = 0 \Leftrightarrow \lambda \text{ mindestens } k-1\text{-fache Nullstelle von } Q(X)$$

Ersteres ist, wie gezeigt, zu $L(x^{k-1}e^{\lambda x}) = 0$ äquivalent, letzters dazu, dass λ mindestens k -fache Nullstelle von $P_L(X)$ ist. \square

E.2 Unabhängigkeit

Satz E.2 Sind die $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ paarweise verschieden, so ist die folgende Menge von Funktionen unabhängig

$$x^r e^{\lambda_k x} \quad k = 1, \dots, s, \quad r = 1, \dots, m_k$$

Beweis. Man kann das auch so formulieren: Sind die $p_k(x)$ Polynome mit

$$0 = \sum_{k=1}^s p_k(x) e^{\lambda_k x}$$

so ist jedes $p_k(x)$ das Nullpolynom. Für $s = 1$ haben wir

$$p_1(x) e^{\lambda_1 x} = 0$$

also $p_1(x) = 0$ da $e^{\lambda_1 x} \neq 0$ für alle x . Nun für $s > 1$ Induktion

$$p_s(x) e^{\lambda_s x} = - \sum_{k=1}^{s-1} p_k(x) e^{\lambda_k x}$$

$$p_s(x) = - \sum_{k=1}^{s-1} p_k(x) e^{(\lambda_k - \lambda_s)x}$$

und Grad von $p_s(x)$ -maliges Differenzieren ergibt

$$0 = - \sum_{k=1}^{s-1} q_k(x) e^{(\lambda_k - \lambda_s)x}$$

mit Polynomen $q_k(x)$ vom gleichen Grad wie $p_k(x)$. In der Tat, für $a \neq 0$ und $\mu \neq 0$ hat man

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [(ax^m + \dots) e^{\mu x}] &= (\mu ax^m + \dots) e^{\mu x} + ((max^{m-1} + \dots) e^{\mu x}) \\ &= (\mu ax^m + bx^{m-1} + \dots) e^{\mu x} \end{aligned}$$

also mit Polynom gleichen Grades. Nach Induktionsannahme ist für $k < s$ jedes $q_k(x)$ das Nullpolynom, also auch das Polynom $p_k(x)$ gleichen Grades. Dann ist auch $p_s(x)$ das Nullpolynom. \square

E.3 Komplexe Exponentialfunktion

Bezeichne i die imaginäre Einheit, also $i^2 = -1$. Wir definieren für $\lambda = \alpha + i\beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$y = e^{\lambda x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

Das können wir als Vektorfunktion auffassen

$$y = e^{\alpha x} \cos \beta x + i e^{\alpha x} \sin \beta x = \begin{pmatrix} e^{\alpha x} \cos \beta x \\ e^{\alpha x} \sin \beta x \end{pmatrix}$$

also

$$\begin{aligned} y' &= \begin{pmatrix} \alpha e^{\alpha x} \cos \beta x - \beta e^{\alpha x} \sin \beta x \\ \alpha e^{\alpha x} \sin \beta x + \beta e^{\alpha x} \cos \beta x \end{pmatrix} \\ &= (\alpha e^{\alpha x} \cos \beta x - \beta e^{\alpha x} \sin \beta x) + i(\alpha e^{\alpha x} \sin \beta x + \beta e^{\alpha x} \cos \beta x) \\ &= e^{\alpha x} [\alpha \cos \beta x + i\beta \sin \beta x + i\alpha \sin \beta x + i\beta \cos \beta x] \\ &= e^{\alpha x} (\alpha + i\beta) [\cos \beta x + i \sin \beta x] = \lambda e^{\lambda x} \end{aligned}$$

$$\boxed{y = e^{\lambda x} \Rightarrow y' = \lambda e^{\lambda x} \text{ für } \lambda \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R}}$$

E.4 Komplexes Fundamentalsystem

Satz E.3 Zu einer homogenen DGL $L(y) = 0$ n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten erhält man ein Fundamentalsystem mit den komplexwertigen Funktionen

$$x^{k-1}e^{\lambda x} \quad \lambda \text{ mindestens } k\text{-fache Nullstelle von } P_L(X)$$

Beweis. Für konstante Koeffizienten (auch solche in \mathbb{C}) gelten Sätze E.1 und E.2 und der Existenz- und Eindeigkeitssatz für lineare DGLn entsprechend für komplexwertige Funktionen y . Nach dem Fundamentalsatz der Algebra ist aber $P_L(X)$ ein Produkt von n Linearfaktoren $X - \lambda_k$, also erhält man nach Satz E.1 und E.2 n unabhängige Lösungen und damit ein Fundamentalsystem. \square

E.5 Reelles Fundamentalsystem

Für eine komplexe Zahl z ist die *konjugierte* definiert als

$$\bar{z} = a - bi, \quad z = a + bi \text{ mit } a, b \in \mathbb{R}$$

Es gilt

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$$

und es folgt

$$\boxed{P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow P(\bar{\lambda}) = 0 \quad P(X) \text{ reelles Polynom}}$$

Lemma E.4 Für $\lambda = \alpha + i\beta$ gilt

$$e^{\alpha x} \cos \beta x = \operatorname{Re} e^{\lambda x} = \frac{1}{2}(e^{\lambda x} + e^{\bar{\lambda}x}), \quad e^{\alpha x} \sin \beta x = \operatorname{Im} e^{\lambda x} = \frac{1}{2i}(e^{\lambda x} - e^{\bar{\lambda}x})$$

Beweis.

$$\overline{e^{\lambda x}} = e^{\alpha x}(\cos \beta x - i \sin \beta x) = e^{\alpha x}(\cos -\beta x + i \sin -\beta x) = e^{\bar{\lambda}x}$$

Satz E.5 Eine DGL mit konstanten Koeffizienten in \mathbb{R} hat ein Fundamentalsystem bestehend aus den folgenden reellen Funktionen

$$x^{k-1}e^{\lambda x} \quad \lambda \in \mathbb{R} \text{ mindestens } k\text{-fache Nullstelle von } P_L(X)$$

$$x^{k-1}e^{\alpha x} \cos \beta = \operatorname{Re}(x^{k-1}e^{\lambda x}), \quad x^{k-1}e^{\alpha x} \sin \beta = \operatorname{Im}(x^{k-1}e^{\lambda x})$$

$$\lambda = \alpha + i\beta \notin \mathbb{R} \text{ mindestens } k\text{-fache Nullstelle von } P_L(X)$$

Beweis. Aus dem komplexen Fundamentalsystem ergibt sich ein System von n Lösungen, indem man nach dem Lemma zwei konjugierte komplexe Lösungen nach dem Lemma durch reelle Funktionen ersetzt, die als Linearkombinationen (mit komplexen Koeffizienten) wieder Lösungen sind. Die Gesamtzahl ist unverändert n . Da man aus den reellen Lösungen die komplexen wieder als Linearkombination (mit Koeffizienten $1, i$) zurückerhält, gilt nach wie vor Unabhängigkeit über \mathbb{C} , also erst recht über \mathbb{R} . Daher hat man ein Fundamentalsystem. \square

E.6 Inhomogene Gleichung

Neben der Variation der Konstanten führt hier in bestimmten Fällen der *Ansatz von Typ* der rechten Seite zum Erfolg: Gegeben

$$L(y) = b(y) = (b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m) \begin{cases} e^{\alpha x} & \lambda \in \mathbb{R} \\ e^{\alpha x} \cos \beta x & \lambda = \alpha + i\beta \\ e^{\alpha x} \sin \beta x & \lambda = \alpha + i\beta \end{cases}$$

Ansatz.

$$\tilde{y} = x^{k-1}(B_0 + \dots + B_m)e^{\lambda x} \quad \text{falls } \lambda \text{ k-fache Nullstelle von } P_L(X)$$

$$B_j \in \mathbb{R} \text{ falls } \lambda \in \mathbb{R}, \quad B_j \in \mathbb{C} \text{ falls } \lambda \in \mathbb{C}$$

Bestimme die B_j aus der DGL $L(\tilde{y}) = b(\tilde{y})$. Dan erhält man eine reelle Lösung von $L(y) = b(y)$ wie folgt

$$y = \begin{cases} \tilde{y} \\ \operatorname{Re} \tilde{y} \\ \operatorname{Im} \tilde{y} \end{cases}$$

Ist die rechte Seite der DGL eine Summe

$$L(y) = b(y) + c(y)$$

so bestimme man Lösungen

$$L(y_b) = b(y_b), \quad L(y_c) = c(y_c)$$

und erhält dann $y = y_b + y_c$ als Lösung von $L(y) = b(y) + c(y)$