Beispiel: Lineare DGL $y' = xy$

Ansatz:

$$y = Ke^{P(x)}$$

Es folgt

$$y' = Ke^{P(x)}P'(x), \quad P'(x) = x, \quad P(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$$

Allgem. Lsg.

$$y_h = Ke^{\frac{1}{2}x^2}$$

Alternativ: Trennung der Veränderlichen
Singuäre Lösung $y = 0$. Für $y \neq 0$:

$$\frac{\partial y}{\partial y} = xy \Leftrightarrow \frac{1}{y}\frac{\partial y}{\partial x} = x \Leftrightarrow \frac{1}{y}\mathrm{d}y = \frac{1}{y}\frac{\partial y}{\partial x}\mathrm{d}x = x\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \ln|y| = \int \frac{1}{y}\mathrm{d}y = x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 + C$$

1. Fall $y > 0$

$$\ln y = \frac{1}{2}x^2 + C, \quad y = e^{\frac{1}{2}x^2 + C} = e^C e^{\frac{1}{2}x^2}$$

2. Fall $y < 0$

$$\ln -y = \frac{1}{2}x^2 + C, \quad y = e^{\frac{1}{2}x^2 + C} = -e^C e^{\frac{1}{2}x^2}$$

Beispiel: Inhomogen lineare DGL $y' = xy + x$

Variation der Konstanten. Ansatz

$$y_s = K(x)e^{\frac{1}{2}x^2}$$

$$\text{Ableiten: } y_s' = K'(x)e^{\frac{1}{2}x^2} + K(x)xe^{\frac{1}{2}x^2}$$

$$\text{Einsetzen in DGL: } y_s' = xK(x)e^{\frac{1}{2}x^2} + x$$

$$\text{Gleichsetzen: } K'(x)e^{\frac{1}{2}x^2} = x$$

$$\text{Auflösen: } K'(x) = xe^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$\text{Integrieren: } K(x) = \int xe^{-\frac{1}{2}x^2} = -e^{-\frac{1}{2}x^2} + C$$

Wähle $C = 0$. Rückeinsetzen in Ansatz

$$\text{Spezielle Lösung: } y_s = K(x)e^{\frac{1}{2}x^2} = -e^{-\frac{1}{2}x^2}e^{\frac{1}{2}x^2} = -1$$

$$\text{Probe: } y_s' = 0 = x(-1) + x$$

Allgemeine Lsg.

$$y = y_h + y_s = Ke^{\frac{1}{2}x^2} - 1$$

Alternativ: Ansatz vom Typ der rechten Seite:

$$y_s = Ax + B$$

$$\text{Ableiten: } y_s' = A$$

$$\text{Einsetzen in DGL: } y_s' = x(Ax + B) + x = Ax^2 + (B + 1)x$$

$$\text{Gleichsetzen: } A = Ax^2 + (B + 1)x$$

$$\text{Koeffizientenvergleich: } A = 0, B = -1$$

$$\text{Spezielle Lösung: } y_s = -1$$

Anfangswertproblem (AWP)

Für $y' = xy$

$$y(0) = y_0 = Ke^{\frac{1}{2}0^2} \Leftrightarrow K = y_0$$

$$y(1) = y_0 == Ke^{\frac{1}{2}1^2} \Leftrightarrow K = y_0 e^{-\frac{1}{2}}$$

Für $y' - xy + x$

$$y(0) = y_0 = Ke^{\frac{1}{2}0^2} - 1 \Leftrightarrow K = y_0 + 1$$

$$y(1) = y_0 = Ke^{\frac{1}{2}1^2} - 1 \Leftrightarrow K = (y_0 + 1)e^{-\frac{1}{2}}$$