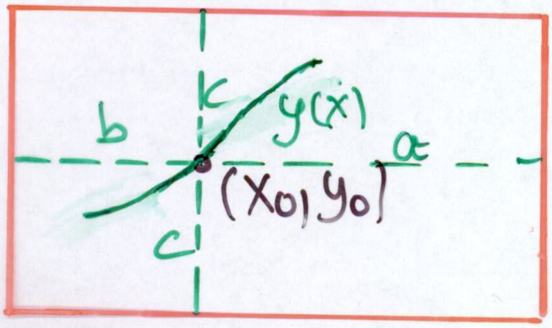
1.4 Existenz und Eindeutigkeit

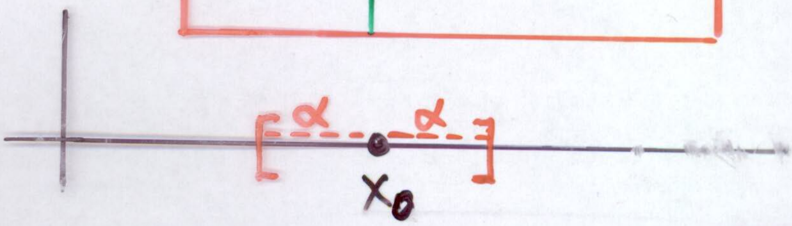
AWP $y' = f(x,y)$, $y_0 = y(x_0)$

$z = f(x,y)$ stetig auf Rechteck R



$M = \sup\limits_{R} f(x,y)$

$\alpha = \min\{a, b, \frac{c}{M}\}$



Satz 1. Peano Es gibt Lsg $y: [x_0-\alpha, x_0+\alpha] \to \mathbb{R}$

Picard-Lindelöf y eindeutig bestimmt, falls ex. Lipschitz-Konstante L

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le L\,|y_1 - y_2|$$

alle $(x, y_i) \in R$

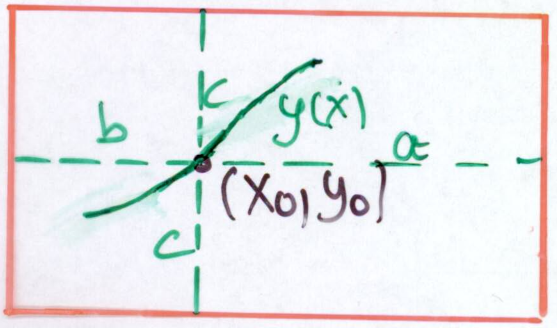
$\Leftrightarrow \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \le L$ falls auf R def.

Übung Mo 12:35 S103/113

1.4 Existenz und Eindeutigkeit

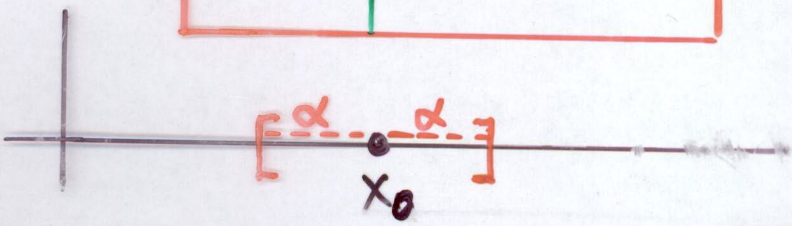
AWP $y' = f(x,y)$, $y_0 = y(x_0)$

$z = f(x,y)$ stetig auf Rechteck R



$$M = \sup_R f(x,y)$$

$$\alpha = \min\{a, b, \tfrac{c}{M}\}$$



Satz 1. Peano Es gibt Lsg $y : [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \to \mathbb{R}$

Picard-Lindelöf y eindeutig bestimmt, falls ex. Lipschitz-Konstante L

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2|$$

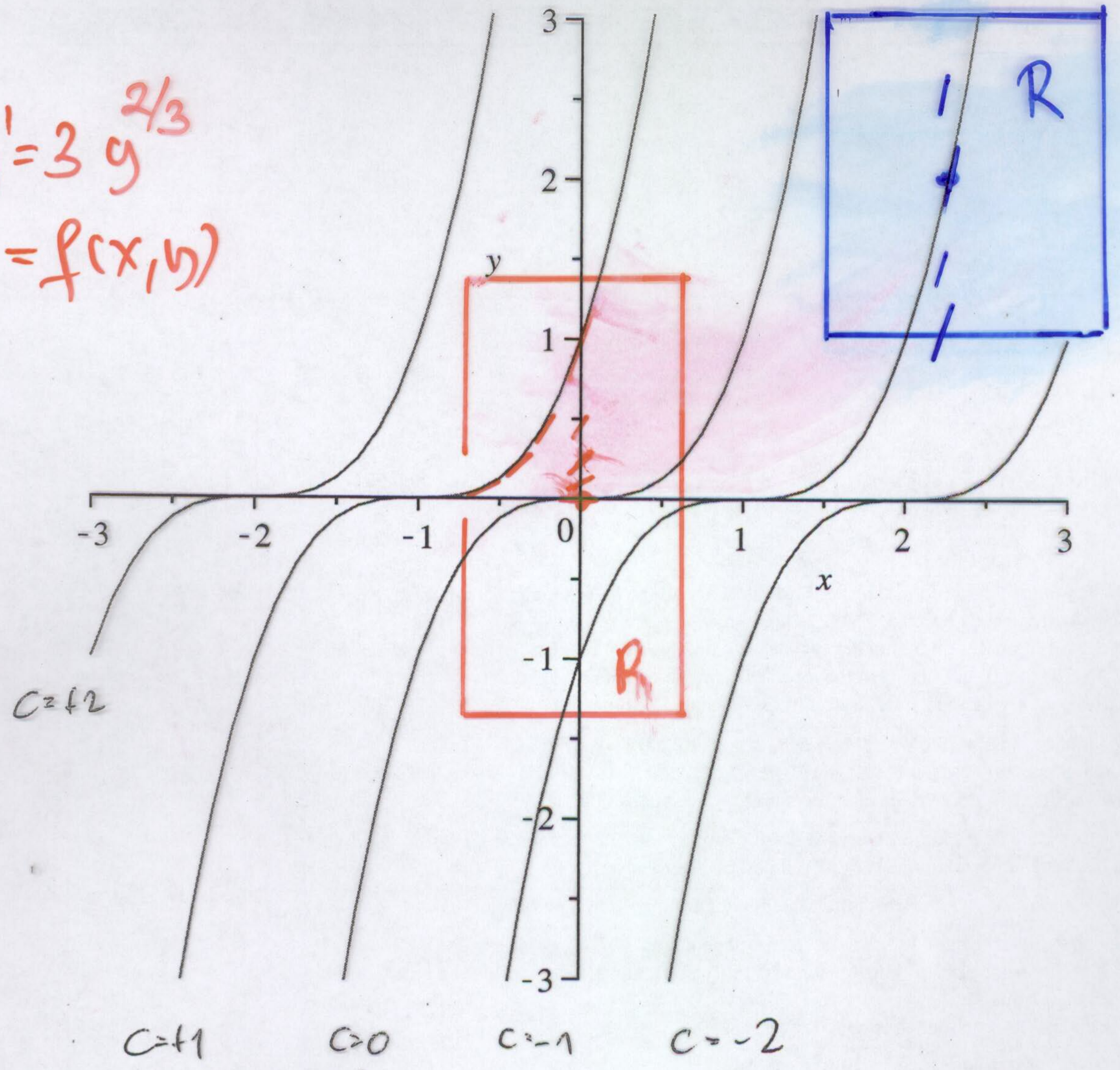
alle $(x, y_i) \in R$

$\Leftrightarrow$ $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leq L$ falls auf R def.

Übung Mo 12:35 S103/113

plot([$(x+2)^3$, $(x+1)^3$, x^3, $(x-1)^3$, $(x-2)^3$], $x=-3..3$, $y=-3..3$, *colour* = *red*);

$$y' = 3\,y^{2/3} = f(x,y)$$



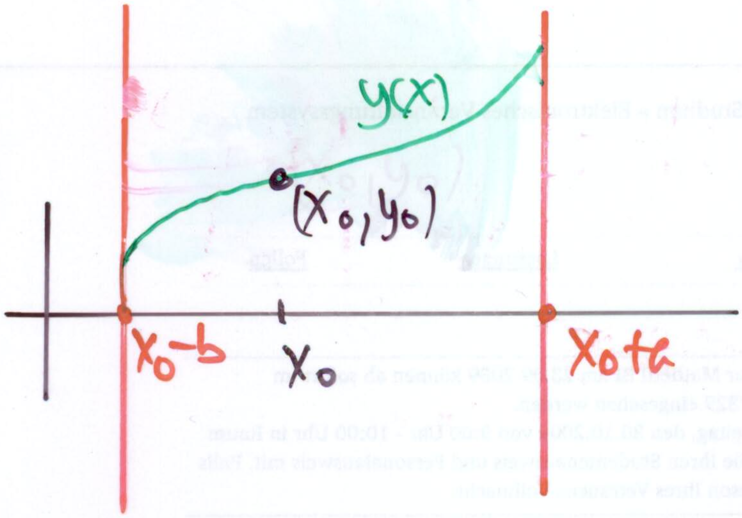
R keine Lipschitzbedingung

$$\frac{|f(0,y_1) - f(0,0)|}{|y_1 - 0|} \to \infty \qquad y_1 \to 0$$

R $$L = \max_{1 \leq y \leq 3} \Big|\underbrace{2\,y^{-1/3}}_{= \frac{\partial f}{\partial y}}\Big| = 2$$

AWP $\quad y' = f(x,y)\ ,\ y_0 = y(x_0)$

$z = f(x,y)$ stetig auf Streifen S



Lipschitz-Konstante L auf S

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2|$$

alle $(x, y_i) \in S$

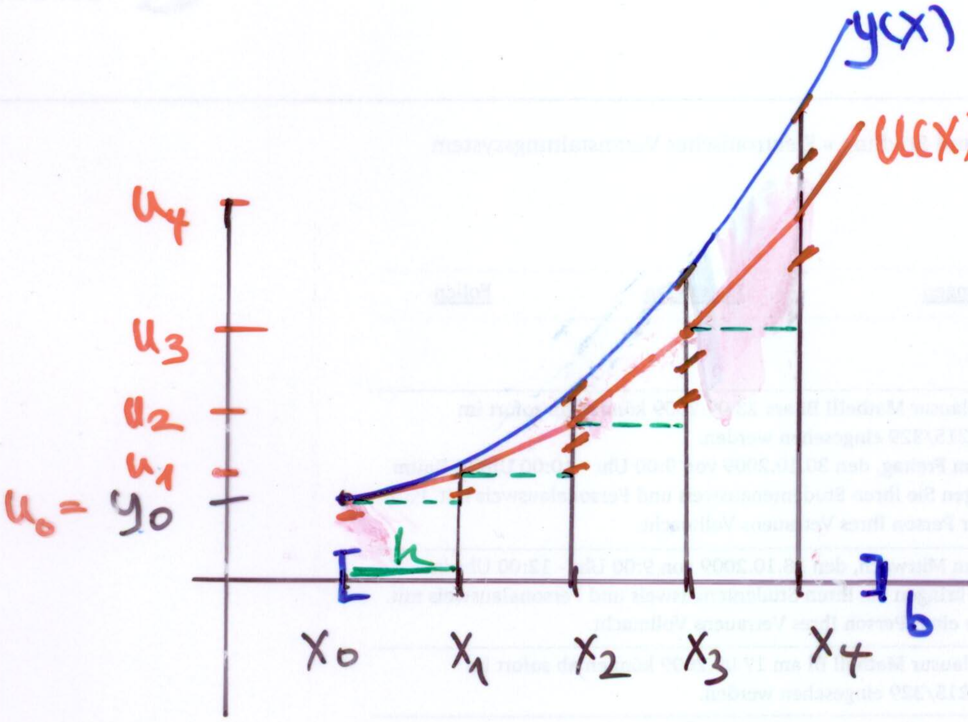
Satz 2 Picard-Lindelöf

Es gibt eindeutig bestimmte Lsg

$$y : [x_0 - b,\ x_0 + a] \to \mathbb{R}$$

1.5 Numerische Lösungsverfahren

Euler $\quad y' = f(x,y) \quad y_0 = y(x_0)$



Schrittweite

h

$$u_0 = y_0$$

$$x_{n+1} = x_n + h \qquad u_{n+1} = u_n + h\, f(x_n, u_n)$$

Polygenzug

$$u_{[h]}(x) = u(x) = u_n + (x - x_n)\, f(x_n, u_n)$$

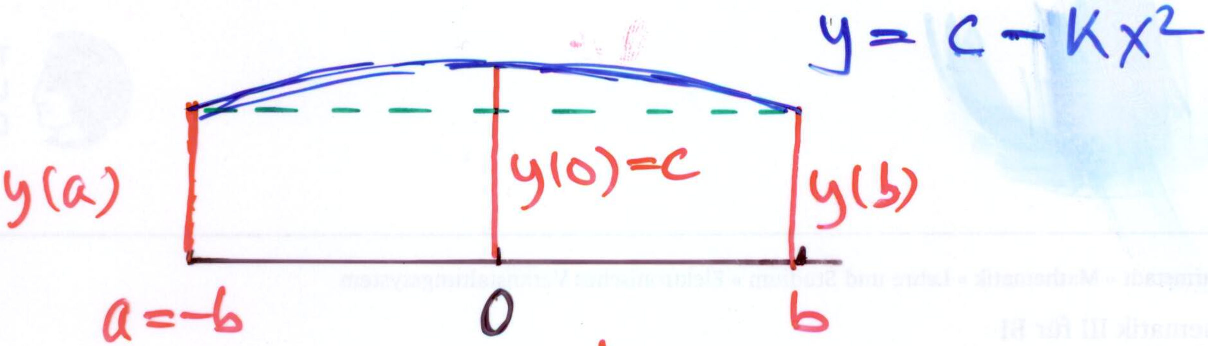
$$x \in [x_n, x_{n+1}]$$

$u_{[h]} \to y$ gleichmäßig

für $h \to 0$

falls f stetig diffbar

Keplers Fassregel



$$= \frac{a+b}{2}$$

$$\int_{-b}^{b} y\,dx = \left[cx - \frac{K}{3}x^3\right]_{-b}^{b}$$

$$= \frac{2b}{6}\left(6c - 2Kb^2\right)$$

$$= \frac{b-a}{6}\left(\underbrace{c-Ka^2}_{y(a)} + \underbrace{4c}_{y\left(\frac{a+b}{2}\right)} + \underbrace{c-Kb^2}_{y(b)}\right)$$

Simpson

$$\int_a^b y\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left(y(a) + 4y\left(\frac{a+b}{2}\right) + y(b)\right)$$

exakt für Polynome vom Grad ≤ 3

Beweis: nachrechnen für x^n $n \leq 3$