a) Geometrische Beziehungen

$$\frac{\Delta x}{\rho} = \frac{\Delta l}{a} \; ;$$

$$\rho = -\frac{(1+[y'(x)]^2)^{3/2}}{y''(x)}$$

(Krümmungsradius)

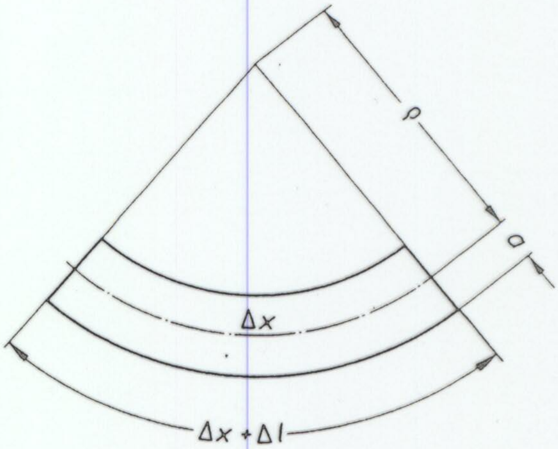


Fig. 1.4: Balkenelement

b) Physikalische Beziehungen

Hookesches Gesetz $\Delta l = \varepsilon \Delta x = \frac{\sigma}{E} \Delta x$

Biegespannung $\sigma = \frac{M \cdot a}{I}$.

Insgesamt erhalten wir

$$\rho = -\frac{(1+[y'(x)]^2)^{3/2}}{y''(x)} = \frac{\Delta x}{\Delta l} a = \frac{\Delta x \cdot aE}{\sigma \Delta x} = \frac{aE \cdot I}{Ma} = \frac{EI}{M} \; ,$$

also

$$\boxed{y''(x) + \frac{M}{EI}(1+[y'(x)]^2)^{3/2} = 0} \qquad (1.4)$$

Mit Gleichung (1.4) ist ein mathematisches Modell für die Durchbiegung eines Balkens unter dem Einfluß eines positiven Momentes M gegeben.

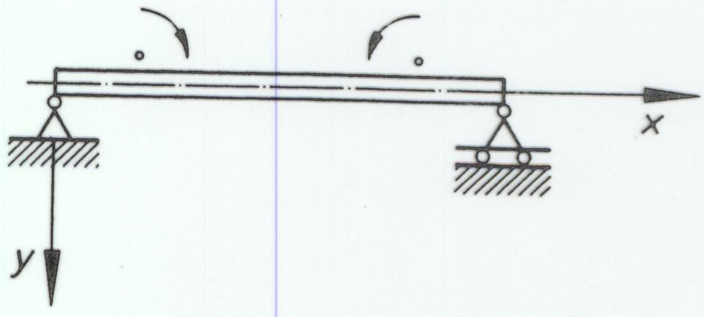
Bemerkung 1: In der Formel für den Krümmungsradius tritt das negative Vorzeichen auf, da bei positivem Moment M der Anteil y'' negativ sein muß. (Warum?)

Bemerkung 2: Für den Fall kleiner Durchbiegungen kann $[y'(x)]^2$ vernachlässigt werden. Die Tangentensteigung $y'(x)$ an die gesuchte Kurve ist dann klein und (1.4) geht in die einfachere lineare Beziehung

$$\boxed{y''(x) = -\frac{M}{EI}} \qquad (1.5)$$

über.

<u>Beispiel 1.4</u> (Durchbiegung eines Balkens). Ein Balken mit konstantem Querschnitt sei auf zwei Stützen gelagert (Fig. 1.3) und werde durch ein positives Moment M auf Biegung beansprucht. Es soll eine Beziehung für die Durchbiegung y des Balkens als Funktion des Abstandes x vom ersten Lager aufgestellt werden. Bei der Durchbiegung des Balkens werden dessen "obere" Schichten auf Druck bzw. "untere" Schichten auf Zug beansprucht, während eine dazwischen liegende Schicht spannungsfrei ist: die neutrale Faser. Seien



<u>Fig. 1.3</u>: Durchbiegung eines Balkens bei Einwirkung eines Biegemoments

E	...	Elastizitätsmodul des Balkenquerschnitts
I	...	axiales Flächenträgheitsmoment des Balkenquerschnitts
$M(x)$	...	Biegemoment
σ	...	Normalspannung
ε	...	Dehnung.

Ferner setzen wir konstante Biegesteifigkeit $E \cdot I$ voraus. Wir greifen für die weitere Untersuchung ein Balkenelement heraus (Fig. 1.4). Es gelten folgende Zusammenhänge:

aus Burg, Haf, Wille
Höhere Mathematik für Ingenieure
Band III