6. VARIATION der KONSTANTEN

Beisp. $y' = x - y + 1$

$y_h = K e^{-x}$

Ansatz $y_s = K(x) e^{-x}$

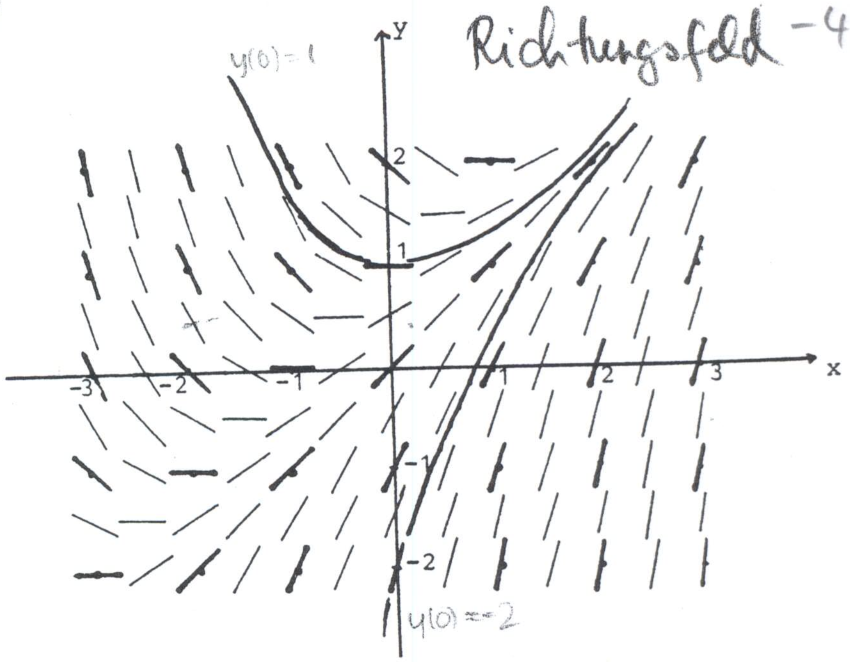
$y_s' = K'(x) e^{-x} + K(x) e^{-x}(-1)$

$y_s' = x - y_s + 1 = x - K(x) e^{-x} + 1$

$\Rightarrow K'(x) e^{-x} = x + 1$

$K'(x) = x e^{x} + e^{x}$

$K_s(x) = x e^{x}$



Richtungsfeld

$y_s = x$, $\therefore$ $y = x + K e^{-x}$. Anfangsbed. $y(x_0) = y_0$ ergibt $K_0 = (y_0 - x_0) e^{x_0}$

allgem.: $y' = p(x) y + q(x)$, $y_h = K e^{P(x)}$ mit $P'(x) = p(x)$

Ansatz $y_s = K(x) e^{P(x)}$

ableiten: $y_s' = K'(x) e^{P(x)} + K(x) e^{P(x)} P'(x)$

$= K'(x) e^{P(x)} + p(x) \cdot y$

aus der DGL $y_s' = p(x) \cdot y + q(x)$

$\Longrightarrow K'(x) e^{P(x)} = q(x)$

$K'(x) = q(x) e^{-P(x)}$

$K_s(x) = \int q(x) e^{-P(x)} + C$

Lösung:

$$\boxed{y = y_h + y_s = K e^{P(x)} + K_s(x) e^{P(x)}}$$ mit $P'(x) = p(x)$, $K_s'(x) = q(x) e^{-P(x)}$

Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ ergibt $K_0 = y_0 e^{-P(x_0)} - K_s(x_0)$

7. EINDEUTIGKEIT.

Jede Lösung der DGL (2) ist von der in C.6 angegebenen Form und bei Vorgabe eines Anfangswerts $y(x_0) = y_0$ eindeutig bestimmt.

Bew. Wegen $\clubsuit$ braucht man nur (1) zu betrachten. Sei $y_1 = e^{P(x)}$ und y_2 bel. Lsg. Dann $z = \frac{y_2}{y_1}$ def und $z' = (y_1 y_2' - y_2 y_1')/y_1^2 = 0$ nach (1). Also $z = K$ konstant, d.h. $y_2 = K y_1 = K e^{P(x)}$.

Aufgabe 1 [21 Punkte]

a) $\frac{1}{2}mv_a^2 = mgh \quad \Longrightarrow v_A = \sqrt{2gh}$

b) $m\ddot{x} = F = ma_0\left(\frac{x}{2r} - 1\right) \quad \Longrightarrow \ddot{x} = a_0\left(\frac{x}{2r} - 1\right)$

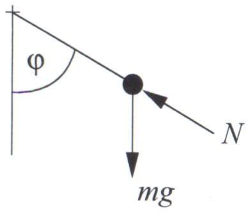
$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx}\frac{dx}{dt} = \dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx}$$

$$\Longrightarrow \int_{v_A}^{v_B} \dot{x}d\dot{x} = \int_0^{2r} a_0\left(\frac{x}{2r} - 1\right)dx$$

$$\frac{1}{2}v_B^2 - \frac{1}{2}v_A^2 = a_0\left[\frac{x^2}{4r} - x\right]_0^{2r} = a_0(r - 2r) = -a_0 r$$

$$\Longrightarrow v_B = \sqrt{v_A^2 - 2a_0 r}$$

c) FKB:



$\nwarrow$: $\quad ma_n = N - mg\cos\varphi \quad , \qquad a_n = r\dot{\varphi}^2$

$$\Longrightarrow N = mr\dot{\varphi}^2 + mg\cos\varphi$$

in C gilt: $\quad \dot{\varphi}^2 = \frac{v_C^2}{r^2}$

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}mv_C^2 + mgr(1 - \cos\varphi) \quad \Longrightarrow v_C^2 = v_B^2 - gr$$

$$\Longrightarrow N = mr\frac{v_C^2}{r^2} + mg\cos 60^\circ = \frac{m}{r}(v_B^2 - gr) + \frac{1}{2}mg = m\left(\frac{v_B^2}{r} - \frac{g}{2}\right)$$

Kap. 1. Gewöhnliche DGLn: Differential-gleichungen

gedämpfte, erzwungene Schwingung

Standardform

$$\ddot{x}+2\delta\dot{x}+\omega^2 x = x_0\omega^2 E\cos\Omega t \qquad \frac{1}{\omega^2}\ddot{x}+\frac{2D}{\omega}\dot{x}+x = x_0 E\cos\Omega t$$

mit $D = \delta/\omega$, $\eta = \Omega/\omega$

$$E = \begin{cases} 1 & \text{a) Kraft- bzw. Federfußpunkterregung} \\ 2D\eta & \text{b) Dämpfererregung} \\ \eta^2 & \text{c) Massenkraft (Unwuchterregung)} \end{cases}$$

allgemeine Lösung $\quad x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

Im "eingeschwungenen" Zustand ist die homogene Lösung abgeklungen und das Verhalten wird durch die Partikularlösung bestimmt.