1.3.2

LINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN 1. Ordnung

1 INTEGRAL. $P(x)$ heißt Stammfunktion von $p(x)$ (auf I), falls

$$\boxed{P'(x) = p(x) \quad (\text{auf } I); \quad P(x) = \int p(x)\,dx + C}$$

ist eine Schreibweise hierfür – $P(x)$ ist bis auf Konstante C bestimmt.

Lösungen der DGL $y' = \frac{dy}{dx} = p(x)$: $y(x) = P(x) + C$

C eindeutig bestimmt durch Vorgabe eines Anfangswerts: $C = y(x_0) - P(x_0)$

.2 WACHSTUM. Die Differentialgleichung (DGL)

$$\boxed{y' = \frac{dy}{dx} = ay \quad \text{hat die Lösungen} \quad y = Ke^{ax}}$$

K wird eindeutig bestimmt durch Vorgabe eines Anfangswerts z.B. $y(0)$:

$K = y(0)$, allgem. $K = y(x_0)\,e^{-ax_0}$.

.3 HOMOGENE GLEICHUNG

(1) $$\boxed{y' = p(x)\cdot y \quad \text{hat die Lösungen} \quad y = e^{\int p(x)\,dx + C} = Ke^{P(x)}}$$

K konstant, $P'(x) = p(x)$

Bew. $y' = Ke^{P(x)}\,P'(x) = y\cdot p(x)$.

.4. INHOMOGENE GLEICHUNG $\boxed{y' = p(x)\cdot y + q(x)}$ (2)

Ist y_s eine "spezielle" Lösung der inhomogenen Gleichung (2), so

$$\boxed{y \text{ Lsg der inhomog. Gl(2)} \Leftrightarrow y = y_s + y_h, \; y_h \text{ Lsg. der homog. Gl. (1)}}$$

Bew. $y' = y_s' + y_h' = p(x)\cdot y_s + q(x) + p(x)\,y_h = p(x)(y_s + y_h) + q(x)$

$y_h' = y' - y_s' = p(x)y + q(x) - (p(x)y_s + q(x)) = p(x)(y - y_s)$

.5. KONSTANTE KOEFFIZIENTEN. Die DGL (a,b konstant)

$$\boxed{y' = ay + b \quad \text{hat die Lsgn.} \quad y = Ke^{ax} - \frac{b}{a}}$$ K konstant