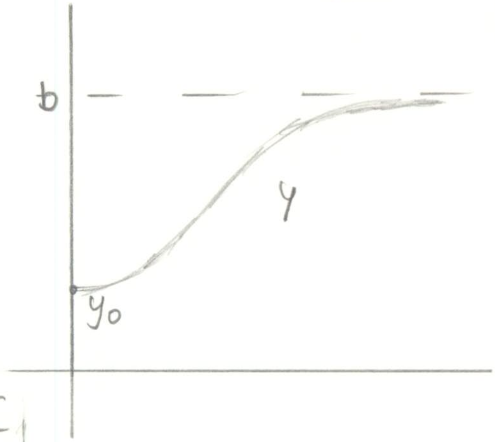
B.4. LOGISTISCHE FUNKTION



$$y' = ay(b-y) \qquad a,b>0$$

$$x = \int dx = \int \frac{dy}{ay(b-y)} = \frac{1}{ab}\int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{b-y}\right) dy$$

$$= \frac{1}{ab}\left(\ln|y| - \ln|b-y|\right) + C \quad = \frac{1}{ab}\ln\left|\frac{y}{b-y}\right| + C$$

$$abx = \ln\left|\frac{y}{b-y}\right| + C \qquad e^{abx} = K\left|\frac{y}{b-y}\right|, \quad K>0 \quad \text{für } y \neq 0,b$$

1.Fall $\frac{y}{b-y} > 0$: $\quad e^{abx} = K\frac{y}{b-y}, \quad \frac{b-y}{y} = K e^{-abx}$

d.h. $0<y<b$ $\quad \frac{b}{y} = 1 + K e^{-abx} \qquad y = \frac{b}{1+Ke^{-abx}} \qquad x \in \mathbb{R}$

2.Fall $\frac{y}{b-y} < 0$: $\quad e^{abx} = K\frac{-y}{b-y} = K\frac{y}{y-b}, \quad \frac{y-b}{y} = K e^{-abx}$

d.h. $y<0$ oder $b<y$. $\quad -\frac{b}{y} = -1 + Ke^{-abx} \qquad y = \frac{b}{1-Ke^{-abx}}$

$$x < \frac{1}{ab}\ln K \quad \text{oder} \quad \frac{1}{ab}\ln K < x$$

Singuläre Lsg $\quad y=0 \quad$ bzw $\quad y=b$

Für Anfangswert $y(x_0) = y_0$, $0<y_0<b$ hat man eindeutig bestimmte Lösung

$$y = \frac{b}{1+Ke^{-abx}} \quad (x\in\mathbb{R}) \qquad \text{mit } K = e^{abx_0}\,\frac{b-y_0}{y_0}$$

$\lim_{x\to\infty} y = b$, y monoton wachsend, Wendepkt für $y(x) = b/2$

da $y'' = ay'(b-y) - ayy' = \underbrace{ay'}_{>0}(b-2y)$, also $y''(x)=0 \Rightarrow y(x) = b/2$

B.5 LEITFADEN: 1. Bestimme singuläre Lösungen ($y=k$ mit $g(k)=0$)

2. Bestimme für (Intervalle mit) $g(y)\neq 0$ die allgemeine Lösung in impliziter Form
3. Bringe die allgem. Lösung in explizite Form (Fallunterscheidungen bzgl. y) und gib jeweils die maximalen Definitionsbereiche an.
4. Stelle fest, welche der Lsg. aus 1. und 3. der Anfangsbed. $y(x_0) = y_0$ genügen. Gibt es dabei genau eine solche, so liegt Eindeutigkeit vor.