# Übungen zur Vorlesung
# Nichtglatte Optimierung und Anwendungen

## G15. Die min-NCP-Funktion

Betrachte die Minimums-Funktion

$$\phi\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \min(a, b).$$

a) Berechnen Sie $\partial_B\phi\binom{a}{b}$ und $\partial^{cl}\phi\binom{a}{b}$.

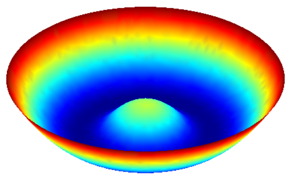
b) Zeigen Sie, dass für jeden Punkt $x = \binom{a}{b} \in \mathbb{R}^2$ die Approximationseigenschaft gilt

$$\sup_{M\in\partial^{cl}\phi(x+s)} |\phi(x+s) - \phi(x) - Ms| = O(\|s\|^2) \quad \text{für } \|s\| \to 0$$

## G16. Hindernisproblem

Die Auslenkung $y : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ einer am Rand fixierten Membran unter einer Kraft $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ ber einem Hindernis auf Höhe $g : \Omega \mapsto (-\infty, 0)$ läßt sich als Minimum des Energiefunktionals durch Lösen des Problems

$$\min_{y\in H_0^1(\Omega)} \int_\Omega (\frac{\kappa}{2}\nabla y(x)^T\nabla y(x) - f(x)^T y(x))\, dx \ \text{ s.t. } \ y \geq g$$



mit einer Elastizitätskonstanten $\kappa > 0$ und dem Sobolevraum

$$H_0^1(\Omega) := \left\{y \in L^2(\Omega) \ : \ \nabla y \in L^2(\Omega)^2, \ y|_{partial\Omega} = 0\right\}$$

bestimmen ($\nabla y$ ist im schwachen Sinne und $y|_{\partial\Omega}$ als Spur zu verstehen).

Durch Diskretisierung erhält man ein endlichdimensionales Problem der Form

$$\min_{\vec{y}\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{2}\vec{y}^T A\vec{y} - \vec{f}^T M\vec{y} \quad \text{s.t. } \vec{y} \geq \vec{g} \tag{H$_h$}$$

mit den symmetrisch positiv definiten Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ (Steifigkeitsmatrix) und $M \in \mathbb{R}^{n,n}$ (Massenmatrix).

a) Zeigen Sie, dass (H$_h$) eine eindeutige Lösung $\vec{y}^*$ besitzt.

b) Stellen Sie die KKT-Bedingungen für (H$_h$) auf.

c) Schreiben Sie die KKT-Bedingungen über die min-NCP-Funktion als nichtglattes Gleichungssystem.

d) Geben Sie das Clarksche Subdifferential für das System aus c) an und begründen Sie, dass damit das verallgemeinerte Newton-Verfahren lokal q-superlinear gegen die Lösung konvergiert.

**G17. Clarkesches Subdifferential für konvexe Funktionen**

Man kann folgendes zeigen: Sei $f : U \to \mathbb{R}$ konvex auf der offenen konvexen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt $\partial^{cl} f = \partial f^T$ auf $U$.

Beweisen Sie die Inklusion

$$\partial^{cl} f \subset \partial f^T$$

**Hinweis:** Sie dürfen verwenden, dass in Differenzierbarkeitspunkten $x$ gilt: $f(y) - f(x) \geq \nabla f(x)^T (y - x) \quad \forall y$.