Übungen zur Vorlesung Nichtglatte Optimierung und Anwendungen

G13. Subdifferential des größten Eigenwerts

Sei $S_n = \{A \in \mathbb{R}^{n,n} \ : \ A = A^T\}$ und

$$\lambda_{max} : A \in S_n \mapsto \max_{\|v\|=1} v^T A v$$

der größte Eigenwert.

Unser Ziel ist der Nachweis, dass

$$\partial\lambda_{max}(A) = \{W \in S_n \ : \ W \succeq 0, \ \text{spur}(W) = 1, \ W \bullet A = \lambda_{max}(A)\}.$$

Bemerkung: Es gilt $\text{spur}(B^{-1}AB) = \text{spur}(A)$ und $A \bullet B = \text{spur}(AB^T)$.

Zeigen Sie:

a) Sei $W \in \partial\lambda_{max}(A)$. Dann muss gelten $W \bullet A = \lambda_{max}(A)$.
Tip: $\lambda_{max}(tA) = t\lambda_{max}(A)$ für alle $t \geq 0$.

b) Sei $W \in \partial\lambda_{max}(A)$. Dann gilt $\text{spur}(W) = 1$.
Tip: Betrachte $B = A + tI$.

c) Sei $W \in \partial\lambda_{max}(A)$. Dann gilt $W \bullet B \leq \lambda_{max}(B)$ für alle $B \in S_n$. Folgern Sie, dass $W \succeq 0$ gelten muss.

d) Sei umgekehrt $W \in S_n$ mit $W \succeq 0$, $\text{spur}(W) = 1$, $W \bullet A = \lambda_{max}(A)$. Zeigen Sie dass dann gilt $W \bullet B \leq \lambda_{max}(B)$ für alle $B \in S_n$ und folgern Sie $W \in \partial\lambda_{max}(A)$.
Tip: Nutzen Sie $W \bullet B = \text{spur}(WB)$, transformieren Sie B auf Diagonalform und nutzen Sie die Eigenschaften der Spur.

G14. Optimalitätsbedingungen für nichtglatte restringierte Probleme

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex und $C \subset \mathbb{R}^n$ nichtleer, abgeschlossen und konvex.

Der Tangentialkegel von C in x ist definiert als

$$T_C(x) := \overline{\{s \in \mathbb{R}^n \ : \ \exists\, t > 0 : x + ts \in C\}}. \tag{1}$$

Bemerkung: Für konvexes C stimmt diese Definition überein mit der Definition aus Optimierung 3

$$T_C(x) := \{s \in \mathbb{R}^n \ : \ \exists\, \eta_k > 0, \ \exists\, x_k \in C : \lim_{k\to\infty} x_k = x, \ \lim_{k\to\infty} \eta_k(x_k - x) = s\}. \tag{2}$$

Wir betrachten das Optimierungsproblem

$$\min f(x) \quad \text{s.t.} \quad x \in C. \tag{P}$$

Wir definieren die Indikatorfunktion

$$\chi_C(x) = \begin{cases} 0, & x \in C \\ \infty, & x \notin C \end{cases}$$

Für $x \in C$ definieren wir analog wie bisher zu $\mathbb{R}$-wertigen Funktionen

$$\partial\chi_C(x) = \{g \in \mathbb{R}^n \;:\; \chi_C(y) - \chi_C(x) \geq g^T(y-x) \;\; \forall\, y \in \mathbb{R}^n\}.$$

Zeigen Sie:

a) (P) is äquivalent zu
$$\min f(x) + \chi_C(x).$$

b) Sei $x \in C$. Dann gilt:
$$\partial\chi_C(x) = \{g \in \mathbb{R}^n \;:\; g^T s \leq 0 \quad \forall\, s \in T_C(x)\}.$$

c) Ist $\bar{x} \in C$ optimale Lösung von (P), dann gilt:
$$\exists\, g \in \partial f(\bar{x}) \;:\; g^T s \geq 0 \;\; \forall\, s \in T_C(\bar{x}).$$

Vergleichen Sie dies mit Optimalitätsbedingungen aus der Nichtlinearen Optimierung.

Bemerkung: Sie dürfen verwenden, dass in $\bar{x}$ die Summenregel für Subdifferentiale angewendet werden darf.

d) Sei nun $C := \{x \in \mathbb{R}^n \;:\; c_i(x) \leq 0, \;\; i = 1, \ldots, m\}$ mit stetig differenzierbaren konvexen Funktionen $c_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Kann man unter einer Constraint Qualification aus c) analog zur Nichtlinearen Optimierung KKT-Bedingungen ableiten. Wie sehen sie aus?

e) Zeigen Sie dass die Mengen (1) und (2) übereinstimmen.