Technische Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Ulbrich

Wintersemester 2009/10

Blatt 4

Übungen zur Vorlesung
Nichtglatte Optimierung und Anwendungen

G10. Duales Problem des regularisierten Schnittebenenmodells

Zeigen Sie:

a) (s^k, ξ^k) ist genau dann Lösung von

$$\min_{s\in\mathbb{R}^n,\xi\in\mathbb{R}} \xi + \frac{1}{2\gamma_k}\|s\|^2 \quad \text{u.d.N.} \quad {g^j}^T s - \alpha_j^k - \xi \le 0,\;\; j \in J_k, \tag{1}$$

wenn die KKT-Bedingungen gelten, d.h. wenn es $\lambda_j^k \in \mathbb{R}$, $j \in J_k$, gibt mit

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma_k} s^k + \sum_{j\in J_k} \lambda_j^k g^j &= 0, \\ \sum_{j\in J_k} \lambda_j^k &= 1, \\ {g^j}^T s^k - \alpha_j^k - \xi^k \le 0,\;\; \lambda_j^k \ge 0,\;\; \lambda_j^k({g^j}^T s^k - \alpha_j^k - \xi^k) &= 0,\;\; j \in J_k. \end{aligned} \tag{2}$$

b) Der Vektor λ^k ist genau dann Lösung des Problems

$$\begin{aligned} \min_{\lambda} \quad & \frac{\gamma_k}{2}\left\|\sum_{j\in J_k} \lambda_j g^j\right\|^2 + \sum_{j\in J_k} \lambda_j \alpha_j^k \\ \text{u.d.N.} \quad & \sum_{j\in J_k} \lambda_j = 1,\;\; \lambda_j \ge 0,\;\; j \in J_k, \end{aligned} \tag{3}$$

wenn die KKT-Bedingungen gelten. Weiter ist $(\lambda^k, \mu^k, \xi^k) \in \mathbb{R}^{|J_k|} \times \mathbb{R}^{|J_k|} \times \mathbb{R}$ genau dann ein KKT-Tupel von (3), wenn (2) für

$$s^k = -\gamma_k \sum_{j\in J_k} \lambda_j^k g^j, \tag{4}$$

erfüllt ist und zusätzlich gilt:

$$\mu_j^k = -{g^j}^T s^k + \alpha_j^k + \xi^k,\;\; j \in J_k. \tag{5}$$

gilt.

c) Sei λ^k eine Lösung von (3). Dann ist λ^k auch Lösung des folgenden Problems:

$$\begin{aligned} \min_{\lambda} \quad & \frac{\gamma_k}{2} \left\| \sum_{j \in J_k} \lambda_j g^j \right\|^2 \\ \text{u.d.N.} \quad & \sum_{j \in J_k} \lambda_j = 1, \;\; \lambda_j \geq 0, \;\; j \in J_k, \quad \sum_{j \in J_k} \lambda_j \alpha_j^k \leq \varepsilon_k \end{aligned} \tag{6}$$

mit

$$\varepsilon_k = \sum_{j \in J_k} \lambda_j^k \alpha_j^k. \tag{7}$$

d) Sei λ^k eine Lösung von (3) und $s^k = -\gamma_k \sum_{j \in J_k} \lambda_j^k g^j =: -\gamma_k v^k$. Dann gilt

$$v^k = P_{G^k_{\varepsilon_k}}(0),$$

wobei $\varepsilon_k = \sum_{j \in J_k} \lambda_j^k \alpha_j^k$ und

$$G_\varepsilon^k = \left\{ \sum_{j \in J_k} \lambda_j g^j \; : \; \sum_{j \in J_k} \lambda_j \alpha_j^k \leq \varepsilon, \;\; \sum_{j \in J_k} \lambda_j = 1, \; \lambda_j \geq 0, \; j \in J_k \right\}. \tag{8}$$

G11. Lagrange-Duales nichtlinearer Optimierungsprobleme

Betrachte das nichtlineare Optimierungsprobleme

$$\min f(x) \;\text{ u.d. NB }\; c(x) \leq 0. \tag{NLP}$$

Die zugehörige Lagrange-Funktion ist

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T c(x).$$

Das *Lagrange-Duale Problem* zu (NLP) ist

$$\max_{\lambda} d(\lambda) \;\text{ u.d. NB }\; \lambda \geq 0. \tag{DP}$$

mit $d(\lambda) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \lambda)$. Die Probleme (NLP) und (DP) haben denselben Optimalwert genau dann, wenn die Lagrange-Funktion einen Sattelpunkt besitzt.

a) Zeigen Sie, dass (DP) als konvexes nichtglattes Optimierungsproblem schreiben kann.
b) Wie kann man einen Subgradienten fr Ihr Problem aus a) berechnen?

G12. Bundle-Verfahren

Wenden Sie das Bundle-Verfahren mit $\eta = 0{,}1$, $\gamma = 1$ und $\epsilon = 0$ auf das folgende Problem an und veranschaulichen Sie sich den Lauf grafisch:

$$\min \; f(x) \quad \text{u.d.N.} \quad 0 \leq x \leq 8$$

mit $f(x) = \max\{4 - x, 3 - x/2, x - 3\}$ und $x^0 = 0$.

******* Frohe Weihnachten und Alles Gute für das Neue Jahr! *******