Technische Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Ulbrich

Wintersemester 2009/10

Blatt 3

Lösungsvorschlag zur Vorlesung Nichtglatte Optimierung und Anwendungen

G7:

Nahe bei $x^0 = 0$ gilt $f(x) = 4 - x$, also $g^0 = -1$. Dies ergibt

$$f_0^{se} = 4 - x$$

und somit das erste Schnittebenenproblem

$$\min 4 - x \quad \text{u.d. Nebenbed. } 0 \le x \le 8$$

mit Lösung $x^1 = 8$. Nahe bei $x^1 = 8$ gilt $f(x) = x - 3$, also $g^1 = 1$. Damit ist

$$f_1^{se} = \max(4 - x, x - 3)$$

und das zweite Schnittebenenproblem

$$\min \max(4 - x, x - 3) \quad \text{u.d. Nebenbed. } 0 \le x \le 8$$

hat die Lösung $x^2 = 3,5$. Nahe bei $x^2 = 3,5$ gilt $f(x) = 3 - x/2$, also $g^2 = -1/2$. Dann gilt

$$f_2^{se} = \max(4 - x, x - 3, 3 - x/2) = f(x)$$

und das dritte Schnittebenenproblem ist gerade das Ausgangsproblem

$$\min \max(4 - x, x - 3, 3 - x/2) \quad \text{u.d. Nebenbed. } 0 \le x \le 8$$

mit Lösung $x^3 = 4$.

G8:

Sei $f(x) = |x|$.

Berechnung von $\partial_\varepsilon f(0)$:

$$\partial_\varepsilon f(0) = \{g\,;\ gs \le |s| - |0| + \varepsilon \ \ \forall\, s \in \mathbb{R}\} = [-1, 1].$$

Berechnung von $\partial_\varepsilon f(x)$, $x > 0$:

$$\partial_\varepsilon f(x) = \{g\,;\ gs \le |x + s| - |x| + \varepsilon \ \ \forall\, s \in \mathbb{R}\}\,.$$

Für $s \ge 0$ ergibt sich

$$gs \le s + \varepsilon \quad \forall\, s \ge 0,$$

also $g \in]-\infty, 1]$.

Für $s \in [-x, 0[$ ergibt sich

$$gs \leq s + \varepsilon \quad \forall\, s \in [-x, 0[,$$

also

$$g \geq 1 + \frac{\varepsilon}{s} \quad \forall\, s \in [-x, 0[.$$

Dies liefert $g \geq 1 - \frac{\varepsilon}{x}$.

Für $s < -x$ ergibt sich

$$gs \leq -x - s - x + \varepsilon = -s - 2x + \varepsilon \quad \forall\, s < -x,$$

also

$$g \geq -1 + \frac{\varepsilon - 2x}{s} \quad \forall\, s < -x.$$

Ist $\varepsilon \geq 2x$, dann ergibt sich $g \geq -1$. Im Fall $\varepsilon < 2x$ erhalten wir $g \geq -1 - \frac{\varepsilon}{x} + 2 = 1 - \frac{\varepsilon}{x}$.

Insgesamt:

$$\partial_\varepsilon f(x) = \begin{cases} [-1, 1] & \text{für } \varepsilon \geq 2x, \\ [1 - \frac{\varepsilon}{x}, 1] & \text{für } \varepsilon < 2x. \end{cases}$$

Im Fall $x < 0$ gilt aus Symmetriegründen $\partial_\varepsilon f(x) = -\partial_\varepsilon f(-x)$.

G9:

zu a): $h(s) := f(x+s) + \frac{1}{2\gamma}\|s\|_2^2$ ist streng konvex und für ein beliebiges $g \in \partial f(x)$ gilt

$$h(s) \geq f(x) + g^T s + \frac{1}{2\gamma}\|s\|_2^2 \to \infty \quad \text{für } \|s\|_2 \to \infty.$$

Damit hat (P_γ) eine eindeutige Lösung s_γ (die Eindeutigkeit folgt aus der strengen Konvexität).

zu b): Setze $\Delta = \|s_\gamma\|_2$. Dann ist s_γ zulässig für (T_Δ). Für jedes s mit $\|s\|_2 \leq \Delta = \|s_\gamma\|_2$ gilt nun

$$f(x+s) + \frac{1}{2\gamma}\|s\|_2^2 \geq f(x+s_\gamma) + \frac{1}{2\gamma}\|s_\gamma\|_2^2,$$

also

$$f(x+s) - f(x+s_\gamma) \geq \frac{1}{2\gamma}(\|s_\gamma\|_2^2 - \|s\|_2^2) \geq 0.$$

Somit ist s_γ Lösung von (T_Δ).

zu c): Sei $\mu > \gamma$. Es gilt

$$f(x+s_\gamma) + \frac{1}{2\gamma}\|s_\gamma\|_2^2 \leq f(x+s_\mu) + \frac{1}{2\gamma}\|s_\mu\|_2^2$$
$$f(x+s_\gamma) + \frac{1}{2\mu}\|s_\gamma\|_2^2 \geq f(x+s_\mu) + \frac{1}{2\mu}\|s_\mu\|_2^2.$$

Subtraktion dieser Gleichungen ergibt

$$\left(\frac{1}{2\gamma} - \frac{1}{2\mu}\right)\|s_\gamma\|_2^2 \leq \left(\frac{1}{2\gamma} - \frac{1}{2\mu}\right)\|s_\mu\|_2^2$$

und somit $\|s_\gamma\|_2^2 \leq \|s_\mu\|_2^2$.

Annahme, $\gamma \to s_\gamma$ ist nicht stetig in einem $\gamma > 0$. Dann existiert $\varepsilon > 0$ und eine Folge $(\gamma_k) \to \gamma$ mit $\|s_{\gamma_k} - s_\gamma\| \geq \varepsilon$. Da (s_{γ_k}) wegen der Beschränktheit von (γ_k) beschränkt ist (Monotonie von $\gamma \to \|s_\gamma\|_2$), gilt nach Übergang einer Teilfolge $s_{\gamma_k} \to \bar{s}$. Nun gilt

$$\begin{aligned} f(x+\bar{s}) + \frac{1}{2\gamma}\|\bar{s}\|_2^2 &= \lim_{k\to\infty} f(x+s_{\gamma_k}) + \frac{1}{2\gamma_k}\|s_{\gamma_k}\|_2^2 \leq \lim_{k\to\infty} f(x+s_\gamma) + \frac{1}{2\gamma_k}\|s_\gamma\|_2^2 \\ &= f(x+s_\gamma) + \frac{1}{2\gamma}\|s_\gamma\|_2^2. \end{aligned}$$

Damit ist $\bar{s}$ optimal für (P_γ), es gilt also $\bar{s} = s_\gamma$ wegen der Eindeutigkeit von s_γ. Dies ist ein Widerspruch, $\gamma \to s_\gamma$ ist doch stetig.

zu d): Nach Voraussetzung ist $\bar{s}$ kein globales Minimum von f. Es folgt $\|\bar{s}\|_2 = \Delta$, da $\bar{s}$ sonst lokales und damit globales Minimum wäre.

Da f bei Vergrößerung der Trust-Region abnimmt, gilt $\|s_\gamma\| > \Delta$ für große $\gamma > 0$. Weiter gilt offensichtlich $\|s_\gamma\| \to 0$ für $\gamma \to 0$.

Nach c) und dem Zwischenwertsatz existiert also ein $\gamma > 0$ mit $\|s_\gamma\|_2 = \Delta$. Nach dem Beweis von b) ist s_γ eine Lösung von (T_Δ) und diese ist eindeutig wegen der strengen Konvexität. Damit gilt $\bar{s} = s_\gamma$.