Technische Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Ulbrich

Wintersemester 2009/10

Blatt 3

Übungen zur Vorlesung
Nichtglatte Optimierung und Anwendungen

G7. Schnittebenen-Verfahren

Wenden Sie das Schnittebenen-Verfahren auf das folgende Problem an und veranschaulichen Sie sich den Lauf grafisch:

$$\min\ f(x) \quad \text{u.d.N.} \quad 0 \leq x \leq 8$$

mit $f(x) = \max\{4 - x, 3 - x/2, x - 3\}$ und $x^0 = 0$.

G8. Berechnung des ε-Subdifferentials

Berechnen Sie das ε-Subdifferential der Funktion $f(x) = |x|$ für alle Punkte $x \in \mathbb{R}$ und alle $\varepsilon \geq 0$.

G9. Regularisierung und Trust-Region Problem

Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex und $x \in \mathbb{R}^n$ fest. Betrachte zu $\gamma > 0$ das Problem

$$\min_s f(x + s) + \frac{1}{2\gamma}\|s\|_2^2. \qquad (\mathrm{P}_\gamma)$$

Zeigen Sie:

a) (P_γ) besitzt eine eindeutige Lösung s_γ.

b) Ist s_γ die Lösung von (P_γ), dann existiert $\Delta > 0$, so dass s_γ das folgende *Trust-Region-Problem* löst:

$$\min_s f(x + s) \quad \text{u. d. Nebenbed.} \quad \|s\|_2 \leq \Delta. \qquad (\mathrm{T}_\Delta)$$

c)* Die Funktion $\gamma \mapsto \|s_\gamma\|_2$ ist monoton wachsend und stetig.
Bemerkung: c) ist ein bisschen schwieriger zu zeigen. Sie können zunächst unter Verwendung von c) mit d) fortfahren.

d) Ist umgekehrt zu $\Delta > 0$ der Punkt $\bar{s}$ eine Lösung von (T_Δ), so dass $\bar{s}$ nach Vergrößern von Δ keine Lösung bleibt, dann ist $\bar{s}$ für geeignetes $\gamma > 0$ die Lösung von (P_γ).

Bitte wenden!

Hausaufgaben:

H5. Endlicher Abbruch des Schnittebenen-Verfahrens

Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ nichtleer, konvex und kompakt. Das Schnittebenen-Verfahren werde angewendet, um die stückweise lineare Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \max_{1 \le i \le m} a_i^T x + b_i$$

mit $a_i \in \mathbb{R}^n$, $b_i \in \mathbb{R}$ auf $X \subset \mathbb{R}^n$ zu minimieren. Hierbei werde jeweils der Subgradient

$$g^k \in \{a_i \ : \ f(x^k) = a_i^T x^k + b_i\}$$

gewählt. Zeigen Sie, dass das Verfahren nach endlich vielen Iterationen eine globale Lösung findet.

H6. Berechnung des ε-Subdifferentials

Berechnen Sie für die Funktion $f(x) = (|x| + 1)^2$ das ε-Subdifferential $\partial_\varepsilon f(0)$ für alle $\varepsilon \ge 0$.