Technische Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Ulbrich

Wintersemester 2009/10

Blatt 2

Lösungsvorschlag zur Vorlesung Nichtglatte Optimierung und Anwendungen

G4:

$$H = \left\{x\, ;\ s^T x = 0\right\}.$$

Liege nun $\partial f(x)$ strikt auf der Seite von H, auf die s nicht zeigt:

$$s^T g < 0 \quad \forall\, g \in \partial f(x). \tag{1}$$

Aus (1) folgt:

$$f'(x, s) = \max_{g \in \partial f(x)} s^T g < 0$$

Die strikte Ungleichung folgt daraus, dass das Maximum angenommen wird. Damit ist s eine Abstiegsrichtung.

Gilt umgekehrt $f'(x, s) < 0$, dann folgt für alle $g \in \partial f(x)$

$$s^T g = g^T s \leq f'(x, s) < 0,$$

also (1).

Nun gelte (1). Dann haben wir

$$d(H, \partial f(x)) = \min_{g \in \partial f(x)} \frac{|s^T g|}{\|s\|} = \min_{g \in \partial f(x)} \frac{-s^T g}{\|s\|} = \frac{-1}{\|s\|} \max_{g \in \partial f(x)} g^T s = \frac{-1}{\|s\|} f'(x, s).$$

Dies liefert

$$f'(x, s) = -\|s\| d(H, \partial f(x)).$$

G5

Das Subgradientenverfahren lautet

$$x^{k+1} = x^k + \sigma_k s^k, \quad s^k = -\frac{g^k}{\|g^k\|}, \quad g^k \in \partial f(x^k) \ \text{ solange } g^k \neq 0.$$

zu a): Für $f(x) = |x|$ gilt offensichtlich

$$\partial f(x) = \begin{cases} \text{sgn}(x) & x \neq 0, \\ [-1, 1] & x = 0. \end{cases}$$

Begründung: Es gilt $f(x) = \max(f_1(x), f_2(x))$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = -x$. Satz 2.3.9 liefert

$$\partial f(x) = \text{conv}(\cup_{i: f_i(x) = |x|} \partial f_i(x)).$$

Wegen $\partial f_1(x) = \{1\}$, $\partial f_2(x) = \{-1\}$ folgt die Behauptung.

i): Sei $x^k \neq 0$ beliebig. Dann gilt

$$s^k = -\frac{\text{sgn}(x^k)}{|\text{sgn}(x^k)|} = -\text{sgn}(x^k).$$

Also gilt $x^{k+1} = x^k - \frac{\text{sgn}(x^k)}{k+1}$. Wir erhalten für $x^0 = 2$

$$x^0 = 2,\ \ x^1 = 2-1 = 1,\ \ x^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$
$$x^3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6},\ \ x^4 = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{12},\ \ x^5 = -\frac{1}{12} + \frac{1}{5} = \frac{7}{60}.$$

ii): Dann ist

$$\sigma_0 = \frac{|x^0| - 0}{1} = |x^0|,$$

also

$$x^1 = x^0 + |x^0|(-\text{sgn}(x^0)) = x^0 - x^0 = 0.$$

Anschließend gilt $g^k = 0$ (dann Abbruch), oder $\sigma^k = 0$. Wir haben Konvergenz nach einem Schritt!

zu b): Für $x \neq 0$ gilt $\partial f(x) = \{2(|x|+1)\text{sgn}(x)\}$. In $x^k \neq 0$ gilt also

$$s^k = -\frac{g^k}{|g^k|} = -\text{sgn}(x^k)$$

und mit ii)

$$\sigma_k = \frac{(|x^k|+1)^2 - 1}{2(|x^k|+1)} = \frac{|x^k|^2 + 2|x^k|}{2(|x^k|+1)} = \frac{|x^k|}{2} + \frac{|x^k|}{2(|x^k|+1)}.$$

Dies ergibt

$$x^{k+1} = x^k + \left(\frac{|x^k|}{2} + \frac{|x^k|}{2(|x^k|+1)}\right)(-\text{sgn}(x^k)) = x^k - \frac{x^k}{2} - \frac{x^k}{2(|x^k|+1)} = x^k\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2(|x^k|+1)}\right),$$

also

$$|x^{k+1} - 0| \leq \frac{1}{2}|x^k|.$$

G6

zu a):

$$\lambda_{\max}(A) = \max_{\|v\|=1} v^T A v$$

ist das Maximum der Familie linerarer Funktionen $l_v : A \mapsto v^T A v$ und somit konvex.

zu b):

$$(vv^T) \bullet A = \sum_{i,j=1}^{n} (vv^T)_{ij} a_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n} v_i v_j a_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n} v_i a_{ij} v_j = v^T A v.$$

Im Fall $v \neq 0$ gilt weiter

$$v^T A v = \frac{v^T}{\|v\|} A \frac{v}{\|v\|} \|v\|^2 \leq \lambda_{\max}(A)\|v\|^2.$$

zu c):

Nach Definition von $\lambda_{\max}$ und b) gilt für alle $B \in \mathcal{S}^{n\times n}$

$$\lambda_{\max}(B) - \lambda_{\max}(A) = \lambda_{\max}(B) - q^T A q \geq q^T B q - q^T A q = (qq^T) \bullet (B - A).$$

Dies ist genau die Subgradienten-Ungleichung für $\lambda_{\max}$ in A.

Beispielanwendung aus der Kontrolltheorie:

Einsetzen der Feedbacksteuerung liefert

$$x'(t) = Ax(t) + BKx(t).$$

Multiplikation von links mit $2x(t)^T$ ergibt

$$\frac{d}{dt}\|x(t)\|^2 = 2x(t)^T x'(t) = x(t)^T (A+BK)x(t) = x(t)^T \frac{1}{2}(A + A^T + BK + K^T B^T)x(t).$$

Möglichst starke Abdämpfung erhält man, wenn man K als Lösung des Eigenwertoptimierungsproblems wählt

$$\min_{K\in\mathbb{R}^{m,n}} \lambda_{max}(A + A^T + BK + K^T B^T).$$