Übungen zur Vorlesung
Nichtglatte Optimierung und Anwendungen

G4. Subgradienten und Abstiegsrichtungen

Sei $f : X \to \mathbb{R}$ konvex auf der offenen konvexen Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ und $x \in X$ beliebig. Sei $H \subset \mathbb{R}^n$ eine Hyperebene durch 0 mit Normale s. Zeigen Sie:
s ist genau dann eine Abstiegsrichtung von f in x, wenn $\partial f(x) \cap H = \emptyset$ und zudem $\partial f(x)$ vollständig auf der Seite von H liegt, in die $-s$ zeigt. Zeigen Sie weiter, dass dann gilt

$$f'(x,s) = -\|s\|\, d(H, \partial f(x)),$$

wobei $d(H, \partial f(x))$ den Abstand zwischen H und $\partial f(x)$ bezeichnet.

G5. Anwendung des Subgradientenverfahrens

a) Betrachte das Problem

$$\min_{x\in\mathbb{R}} f(x)$$

für $f(x) = |x|$ mit Lösung $\bar{x} = 0$. Wenden Sie das Subgradientenverfahren aus Algorithmus 2 (wegen $X = \mathbb{R}^n$ ist $P_X = id$) an mit den Schrittweiten

i) $\sigma_k = \frac{1}{k+1}$,

ii) $\sigma_k = \frac{f(x^k)-f(\bar{x})}{|g^k|}$ (vgl. (2.12) aus der Vorlesung).

Berechnen Sie für $x^0 = 2$ in beiden Fällen $x^1, \ldots, x^5$ (solange nicht $g^k = 0$ auftritt).

b) Sei nun $f(x) = (|x| + 1)^2$ mit Minimum $\bar{x} = 0$. Zeigen Sie, dass das Subgradientenverfahren mit Schrittweitenwahl ii) für alle Startpunkte $x^0 \in \mathbb{R}$ Iterierte x^k liefert mit

$$|x^{k+1} - \bar{x}| \le \frac{1}{2}|x^k - \bar{x}|.$$

G6. Eigenwert-Optimierung

In zahlreichen Anwendungen tritt das Problem auf, den größten Eigenwert einer symmetrischen Matrix zu minimieren. Wir betrachten also die Funktion

$$\lambda_{\max} : A \in \mathcal{S}^{n,n} \mapsto \max_{\|v\|=1} v^T A v,$$

wobei $\mathcal{S}^{n,n} = \{A \in \mathbb{R}^{n,n} \ : \ A = A^T\}$ die Menge aller symmetrischen $n \times n$-Matrizen bezeichne. Beachte hierbei, dass bei symmetrischen Matrizen die Eigenvektoren eine Orthogonalbasis bilden und daher tatsächlich $\lambda_{\max}(A) = \max_{\|v\|=1} v^T A v$ ist.

Bitte wenden!

Wir versehen $\mathcal{S}^{n,n}$ mit dem Skalarprodukt $A \bullet B := \sum_{i,j=1}^n a_{ij} b_{ij}$, wobei $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ (also dem euklidischen Skalarprodukt, wenn wir Matrizen als n^2-Vektoren auffassen).

a) Begründen Sie, dass die Funktion $\lambda_{\max}$ konvex ist.

b) Zeigen Sie, dass für alle $v \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathcal{S}^{n,n}$ gilt:
$$(vv^T) \bullet A = v^T A v \leq \lambda_{\max}(A) \|v\|^2.$$
Zeigen Sie, dass Gleichheit in der rechten Ungleichung gilt, falls v ein Eigenvektor von A zu $\lambda_{\max}(A)$ ist.

c) Sei nun q, $\|q\| = 1$, ein Eigenvektor zum maximalen Eigenwert von $A \in \mathcal{S}^{n,n}$.
Zeigen Sie, dass dann qq^T ein Subgradient von $\lambda_{\max}$ im „Punkt" A ist, also:
$$\lambda_{\max}(B) - \lambda_{\max}(A) \geq (qq^T) \bullet (B - A) \quad \forall\, B \in \mathcal{S}^{n,n}.$$

Beispielanwendung aus der Kontrolltheorie: Betrachte das Anfangswertproblem
$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0,\ \ t > 0$$
mit $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $B \in \mathbb{R}^{n,m}$, $m \leq n$. Hierbei sei $u : [0, \infty) \to \mathbb{R}^m$ eine *Steuerfunktion* und $x : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ der resultierende *Zustand* des Systems.

Aufgabe: Finde durch ein Eigenwertoptimierungsproblem eine Matrix $K \in \mathbb{R}^{m,n}$, so dass die Feedbacksteuerung $u(t) := Kx(t)$ die euklidische Norm $\|x(t)\| := \sqrt{x(t)^T x(t)}$ des Zustands möglichst schnell abdämpft, also $\frac{d}{dt}\|x(t)\|^2$ möglichst negativ wird.

Hausaufgaben:

H3. Oberhalbstetigkeit des Subdifferentials

Sei $f : U \to \mathbb{R}$ konvex auf der offenen konvexen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$.

a) Verwenden Sie die Subgradienten-Ungleichung, um zu zeigen: Aus
$$x^k \in U, \quad g^k \in \partial f(x^k),\ \ k \geq 0, \quad \lim_{k\to\infty} x^k = x \in U, \quad \lim_{k\to\infty} g^k = g \in \mathbb{R}^n$$
folgt $g \in \partial f(x)$.

b) Zeigen Sie, dass ∂f oberhalbstetig ist, d.h.
$$\forall\, x \in U,\ \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 : \quad \bigcup_{y \in B_\delta(x)} \partial f(y) \subset \partial f(x) + B_\varepsilon(0).$$
Das heißt: Ist y nahe genug bei x, so liegt $\partial f(y)$ in einer ε-Umgebung von $\partial f(x)$.

H4. Kompaktheit der Optimallösungsmenge

Betrachte das Problem
$$\min_{x \in X} f(x) \tag{PX}$$
mit $X \subset \mathbb{R}^n$ nichtleer, abgeschlossen, konvex und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex.

Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

i) Die Niveaumengen $N(\nu) := \{x \in X \ :\ f(x) \leq \nu\}$ sind für jedes $\nu \in \mathbb{R}$ kompakt.

ii) Die Menge X_{opt} der Optimallösungen von (PX) ist nichtleer und kompakt.