Technische Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Ulbrich

Wintersemester 2009/10

Blatt 1

Übungen zur Vorlesung
Nichtglatte Optimierung und Anwendungen

G1. Versagen der exakten Schrittweitensuche bei nichtglatten Problemen

Gegeben sei das Problem

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

mit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex und stetig differenzierbar. Wir betrachten das

Verfahren des steilsten Abstiegs mit exakter Schrittweitensuche:

Wähle $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Für $k = 0, 1, 2, \ldots$:

1. *Setze $s^k = -\nabla f(x^k)$ (Richtung des steilsten Abstiegs).*
2. *Ermittle die optimale Schrittweite $\sigma_k \geq 0$ entlang s^k:*
$$f(x^k + \sigma_k s^k) = \min_{\sigma \geq 0} f(x^k + \sigma s^k).$$
3. *Setze $x^{k+1} = x^k + \sigma_k s^k$.*

Zeigen Sie:

a) Das Verfahren erzeugt für die konvexe Funktion $f_1(x) = x_1^2 + 2x_2^2$ zum Startpunkt $x^0 = (2, 1)^T$ die Folge
$$x^{2k} = 9^{-k} x^0, \quad x^{2k+1} = 9^{-k} x^1,$$
konvergiert also gegen das Minimum von f_1. Skizzieren Sie die Höhenlinien von f_1 und die Iterierten x^k.

b) Das Verfahren produziert für die nichtglatte konvexe Zielfunktion
$$f_2(x) := \sqrt{f_1(x)}$$
dieselbe Folge x^k, konvergiert also gegen das Minimum von f_2.

c) Das Verfahren erzeugt auch für die nichtglatte, stetige, konvexe (kein Nachweis!) Zielfunktion
$$f_3(x) := \begin{cases} f_2(x) & x_1 \geq |x_2|, \\ \frac{1}{\sqrt{3}}(x_1 + 2|x_2|) & x_1 < |x_2|, \end{cases}$$
dieselbe Folge x^k, aber x^k konvergiert nicht gegen ein Minimum von f_3. Skizzieren Sie die Höhenlinien von f_3 und die Iterierten x^k.

d) Warum ist es also hoffnungslos, das Verfahren des steilsten Abstiegs mit exakter Schrittweitensuche auf nichtglatte Probleme erweitern zu wollen?

Bitte wenden!

G2. Berechnen Sie die folgenden Subdifferentiale:

a) $\partial f(0)$ für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}.$

Veranschaulichen Sie sich Ihr Ergebnis grafisch.

b) $\partial f(0)$ für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \|x\|_2 = \sqrt{x^T x}.$

G3. Epigraph und Subgradienten

Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ und $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Der Epigraph von f ist definiert gemäß

$$\text{epi}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \alpha \end{pmatrix} \; ; \; x \in X, \; \alpha \in \mathbb{R}, \; \alpha \geq f(x) \right\}.$$

a) Zeigen Sie, dass X und f genau dann konvex sind, wenn epi(f) konvex ist.

b) Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ konvex und offen und $f : X \to \mathbb{R}$ sei konvex. Zeigen Sie, dass $g \in \mathbb{R}^n$ genau dann ein Subgradient von f im Punkt $x \in X$ ist, wenn der Vektor $v = (g^T, -1)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ im Punkt $(x^T, f(x))^T$ senkrecht aus epi(f) herauszeigt, genauer:

$$(g^T, -1) \left(z - \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \right) \leq 0 \quad \forall \, z \in \text{epi}(f). \qquad (*)$$

c) Begründen Sie, dass man $(*)$ im folgenden Sinne interpretieren kann:
Die Hyperebene

$$H = \{ z \in \mathbb{R}^{n+1} \; : \; (g^T, -1)z = g^T x - f(x) \} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

durch den Punkt $(x^T, f(x))^T$ mit Normale $v = (g^T, -1)^T$ verläuft überall auf oder unter dem Graphen von f (man sagt: H stützt den Graphen von f (und gleichzeitig den Epigraphen von f) im Punkt $(x^T, f(x))^T$ von unten).

Hausaufgaben:

H1. Negative Subgradienten sind nicht immer Abstiegsrichtungen

Betrachte die Funktion

$$f(x) = \frac{x_1^2}{2} + 2|x_2|.$$

Zeige: Es gilt $g = \binom{1}{2} \in \partial f\binom{1}{0}$, aber $s = -g$ ist keine Abstiegsrichtung von f in $x = \binom{1}{0}$.

H2. Richtungsableitung des Maximums von Funktionen

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und seien $f_i : U \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$, stetige Funktionen. Wir betrachten die Funktion $f : U \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \max_{1 \leq i \leq m} f_i(x)$. Sei nun $x \in U$ und $I(x) = \{ i \; ; \; f_i(x) = f(x) \}$.

Zeigen Sie: Sind die Funktionen f_i, $i \in I(x)$, richtungsdifferenzierbar in x, dann ist f ebenfalls richtungsdifferenzierbar in x und es gilt

$$f'(x, s) = \max_{i \in I(x)} f_i'(x, s) \quad \forall \, s \in \mathbb{R}^n.$$