Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Nada Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/2010
10.12.2009

9. Übungsblatt zur „Analysis II“

Gruppenübung

Aufgabe G1

Bestimmen Sie Art und Lage der lokalen Extrema von

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x,y) := (4x^2 + y^2)e^{-x^2-4y^2}.$$

Lösung:
Es gilt

$$grad\, f(x,y) = \left((8x - 8x^3 - 2xy^2)e^{-x^2-4y^2}, (2y - 32x^2y - 8y^3)e^{-x^2-4y^2}\right)$$

Wir setzen nun $grad\, f(x,y) = 0$, dann muß gelten:

$$2x(4 - 4x^2 - y^2) = 0 = 2y(1 - 16x^2 - 4y^2)$$

Es sind 4 Fälle zu untersuchen:

- $2x = 0 = 2y \Rightarrow x = 0 = y$.
- $4 - 4x^2 - y^2 = 0 = 1 - 16x^2 - 4y^2$
  $\Rightarrow\ y^2 = 4 - 4x^2 \ \Rightarrow\ 1 - 16x^2 - 4(4 - 4x^2) = -15 = 0 \ \Rightarrow\ \lightning$.
- $2x = 0 = 1 - 16x^2 - 4y^2 \Rightarrow x = 0,\ y = \pm\frac{1}{2}$.
- $2y = 0 = 4 - 4x^2 - y^2 \Rightarrow y = 0,\ x = \pm 1$.

$\Rightarrow$ Kandidaten für lokale Extrema: $(0,0),\ (0,\frac{1}{2}),\ (0,-\frac{1}{2}),\ (1,0),\ (-1,0)$.

$$(Hess\, f)(x,y) = \begin{pmatrix} (-40x^2 + 16x^4 + 4x^2y^2 - 2y^2 + 8)e^{-x^2-4y^2} & (-68xy + 64x^3y + 16xy^3)e^{-x^2-4y^2} \\ (-68xy + 64x^3y + 16xy^3)e^{-x^2-4y^2} & (-40y^2 + 256x^2y^2 + 64y^4 - 32x^2 + 2)e^{-x^2-4y^2} \end{pmatrix}$$

Für den Punkt $(0,0)$ gilt:
$\Rightarrow\ (Hess\, f)(0,0) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \ \Rightarrow\ (Hess\, f)(0,0)$ ist positiv definit.
$\Rightarrow f$ besitzt ein isoliertes Minimum im Punkt $(0,0)$.
Analog folgt: isoliertes Maximum in $(1,0)$ und $(-1,0)$; kein lokales Extremum in $(0,\frac{1}{2})$ und $(0,-\frac{1}{2})$.

Aufgabe G2

Zeigen Sie, dass die Eulersche Gammafunktion

$$\Gamma := \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \quad \text{für} \quad x > 0$$

stetig ist.

Lösung:

Dass die Funktion $\Gamma : \{x \in \mathbb{R} | x > 0\} \to \mathbb{R}$ überhaupt wohldefiniert ist, wurde bereits in Tutorium 4 behandelt.

Mit Hilfe von Satz 10.31 zeigen wir: $\Gamma : (0, r] \to \mathbb{R}$ ist stetig für alle $r \in \mathbb{R}$.

Setze $f : [0, \infty) \times (0, r] \to \mathbb{R}$, $f(t, x) = e^{-t} t^{x-1}$.

Dann ist f stetig und beschränkt, denn mit $n := \lceil r - 1 \rceil = \min\{m \in \mathbb{N} | r - 1 \leq m\}$ gilt:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{t^{x-1}}{e^t} \leq \lim_{t \to \infty} \frac{t^n}{e^t} \leq \lim_{t \to \infty} \frac{n!}{e^t} = 0.$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{t^{x-1}}{e^t} = 0.$$

Zeigen nun, dass $\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$ gleichmäßig konvergiert:

Es konvergiert für jedes $x \in (0, r]$. Weiterhin gilt wegen $\lim_{t \to \infty} \frac{t^{x-1}}{e^t} = 0$, dass ein $b_0 > 0$ existieren muß, so dass $\frac{t^{x-1}}{e^t} \leq \frac{1}{t^2}$ für alle $t \geq b_0$ und $x \in (0, r]$.

$$\Rightarrow \quad \int_b^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \leq \int_b^\infty \frac{1}{t^2} dt < \varepsilon \qquad \text{für genügend großes } b_0 \text{ und alle } b \geq b_0 \text{ und alle } x \in (0, r].$$

Daher konvergiert $\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$ glm. $\quad \Rightarrow \Gamma$ ist stetig.

Aufgabe G3

Sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung, so dass für ein festes $m \in \mathbb{N}$ ein q mit $0 < q < 1$ existiert, so dass

$$\|T^m x - T^m y\| \leq q \|x - y\| \text{ für alle } x, y \in X$$

gilt. Zeige

(a) Es gibt einen eindeutig bestimmten Fixpunkt $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ von T, das heißt $T(\bar{x}) = \bar{x}$.

(b) Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $T^k(x) \xrightarrow{k \to \infty} \bar{x}$.

Hinweis: Der herkömmliche Banachsche Fixpunktsatz (Beh. für $m = 1$) kann verwendet werden.
Gilt für jede Abbildung $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, dass aus $g^m(\bar{x}) = \bar{x}$ folgt $g(\bar{x}) = \bar{x}$?

Lösung:

Der gewöhnliche Banachsche Fixpunktsatz angewendet auf T^m liefert die Existenz eines eindeutigen Fixpunktes $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ von T^m mit $T^{jm} x \xrightarrow{j \to \infty} \bar{x}$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Insbesondere folgt:

$$T^{jm+k} x = T^{jm}(T^k x) \xrightarrow{j \to \infty} \bar{x}$$

für alle $k \in \{0, ..., m-1\}$. Also zerfällt $(T^k x)_k$ in m Teilfolgen, die alle gegen $\bar{x}$ konvergieren. Also gilt

$$T^n x \xrightarrow{n \to \infty} \bar{x}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Es bleibt zu zeigen, dass $\bar{x}$ ein Fixpunkt von T ist. Dies folgt aus

$$\|\bar{x} - T\bar{x}\| = \|T^m\bar{x} - T^mT\bar{x}\| \leq q\|\bar{x} - T\bar{x}\|.$$

Dieser Fixpunkt ist eindeutig, da jeder Fixpunkt von T auch ein Fixpunkt von T^m ist; dieser ist eindeutig.
Natürlich ist die Antwort auf die Frage nein. Denn sei $g(x) = -x$. Dann hat g nur 0 als Fixpunkt und für g^2 sind alle Punkte des $\mathbb{R}^n$ Fixpunkte.

Aufgabe G4

Die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4) := (x_1^2 + x_2x_3, x_1x_2 + x_2x_4, x_1x_3 + x_3x_4, x_2x_3 + x_4^2)$$

ist stetig differenzierbar. Berechnen Sie $f(1,0,0,1)$ und die Ableitung $f'(1,0,0,1)$. Schließen Sie, dass es eine offene Umgebung V von $(1,0,0,1)$ in $\mathbb{R}^4$ gibt und eine stetig differenzierbare Funktion $w : V \to \mathbb{R}^4$ derart, dass $f(w(x)) = x$ für alle $x \in V$.

Lösung:

Es ist $f(1,0,0,1) = (1,0,0,1)$ und

$$f'(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} 2x_1 & x_3 & x_2 & 0 \\ x_2 & x_1 + x_4 & 0 & x_2 \\ x_3 & 0 & x_1 + x_4 & x_3 \\ 0 & x_3 & x_2 & 2x_4 \end{pmatrix}.$$

Damit gilt $f'(1,0,0,1) = 2 \cdot \mathbf{1}$ also 2mal die Einheitsmatrix und somit eine invertierbare Matrix. Nach Satz 12.5 ist f daher lokal um $(1,0,0,1)$ invertierbar mit einer stetig differenzierbaren lokalen Umkehrfunktion.

Es gibt somit offene Umgebungen U von $(1,0,0,1)$ und V von $f(1,0,0,1)$ in $\mathbb{R}^4$, sodass $f(U) = V$ und $f|_U : U \to V$ ein Diffeomorphismus ist.

Für $w := (f|_U)^{-1} : V \to U$ gilt dann $f(w(x)) = x$ für alle $x \in V$.

Hausübung

Die Hausaufgaben H1 und H3 sind als Präsentationsaufgaben geeignet!

Aufgabe H1 (3 Punkte)

Bestimmen Sie Art und Lage der lokalen Extrema von

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \text{ mit } g(x,y,z) := x^2 + 2y^2 + z^4 - 2x + 2y - \frac{1}{2}z + 7.$$

Lösung:

Es gilt

$$grad\, g(x,y,z) = (2x - 2, 4y + 2, 4z^3 - \frac{1}{2}).$$

Wir setzen $grad\, f(x,y,z) = 0 \;\Rightarrow\; x = 1, y = -\frac{1}{2}, z = \frac{1}{2}$.

$$(Hess\, g)(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 12z^2 \end{pmatrix} \Rightarrow (Hess\, g)(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Alle Eigenwerte sind > 0, damit ist die Matrix positiv definit und daher besitzt g hier ein isoliertes Minimum.

Aufgabe H2 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Gamma-Funktion für $x > 0$ unendlich oft differenzierbar ist und dass gilt

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \cdot (\ln t)^k \cdot e^{-t} dt.$$

Lösung:

Wir wollen wie in Aufgabe G2 Satz 10.31 anwenden. Sei wieder $f(t,x) : [0,\infty) \times (0,r] \to \mathbb{R}$ mit $f(t,x) := e^{-t}t^{x-1}$. Dann gilt

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(t,x) = t^{x-1} \cdot (\ln t)^k \cdot e^{-t}.$$

Wir müssen also noch zeigen, dass $\int_0^\infty t^{x-1} \cdot (\ln t)^k \cdot e^{-t} dt$ gleichmäßig konvergiert, dann folgt die Behauptung mit Satz 10.31.

Wir spalten $\int_0^\infty t^{x-1} \cdot (\ln t)^k \cdot e^{-t} dt$ in die beiden Teilintegrale

$$\int_0^1 t^{x-1} \cdot (\ln t)^k \cdot e^{-t} dt \quad \text{und} \quad \int_1^\infty t^{x-1} \cdot (\ln t)^k \cdot e^{-t} dt$$

auf und weisen deren glm. Konvergenz mit Hilfe des Majorantenkriteriums nach.

Für $0 < t \leq 1$ und alle $x \in (c,r]$ mit $c > 0$ gilt

$$t^{x-1} \cdot |\ln(t)|^k \cdot e^{-t} \leq t^{c-1} \cdot |\ln(t)|^k.$$

Mit der Substitution $y = -\ln t$ erhält man, dass $\int_0^1 t^{c-1} \cdot |\ln(t)|^k dt$ konvergiert.

Für $t \geq 1$ und $x \in [0,r]$ gilt

$$t^{x-1}(\ln t)^k e^{-t} \leq t^{n+k} e^{-t} \qquad \text{mit } \mathbb{N} \ni n \geq r-1,$$

da $0 \leq \ln t \leq t$.

$\int_1^\infty t^{n+k} e^{-t} dt$ ist konvergent (s. G2).

Damit sind die beiden Teilintegrale gleichmäßig konvergent.

Aufgabe H3 (2+1 Punkte)

a) Welche der folgenden Funktionen sind Kontraktionen?

   i) $f(x) := \frac{1}{8} x^2$ auf $X = [0,2]$.

   ii) $g(x) := \frac{x+2}{x+1}$ auf $X = (1,2)$.

   iii) $h(x) := \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf $X = \mathbb{R}^2$.

   iv) $k(x) := x^2$ auf $X = [1,2]$.

b) Welche der oben genannten Funktionen besitzen einen Fixpunkt?

Lösung:

a) i)

$$\|f(x) - f(y)\| = \frac{1}{8}\|x^2 - y^2\| = \frac{1}{8}\|x - y\| \, \|x + y\| \leq \frac{1}{2}\|x - y\|.$$

ii) Wegen $\frac{x+2}{x+1} = 1 + \frac{1}{x+1}$ ist

$$\|g(x) - g(y)\| = \|\frac{1}{x+1} - \frac{1}{y+1}\| = \|\frac{x-y}{xy+1+x+y}\| \leq \frac{1}{4}\|x - y\|.$$

iii)

$$\|h(x) - h(y)\|_\infty = \frac{1}{8}\| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} (x - y)\|_\infty \leq \frac{1}{8}\| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \|_\infty \, \|x - y\|_\infty = \frac{7}{8}\|x - y\|_\infty.$$

iv) Sei $x = 2$ und $y = 1$: $2^2 - 1^2 = 3$ und $2 - 1 = 1 \Rightarrow$ Dies ist keine Kontraktion.

b) i) - iii) besitzen nach Satz 12.1 einen eindeutigen Fixpunkt.

iv)

$$k(x) = x^2 = x \quad \leftrightarrow \quad x_1 = 0, \; x_2 = 1$$

Da $x_2 \in [1, 2] \Rightarrow k(x)$ hat einen Fixpunkt in $[1, 2]$.

Aufgabe H4 (8 Punkte)

Zeige, daß die Abbildung $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$$

für jedes $(x, y) \neq (0, 0)$ lokal umkehrbar ist. Ist F auch global umkehrbar? Bestimme das Urbild $F^{-1}(\{(a, b)\})$ eines beliebigen Punktes $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Lösung:

Offensichtlich ist F stetig differenzierbar. Für die lokale Umkehrung müssen wir nach Satz 12.5 zeigen, daß $DF(x, y)$ für alle $(x, y) \neq 0$ invertierbar ist. Da gilt

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} \quad \text{und damit} \quad \det(DF(x, y)) = 4(x^2 + y^2)$$

folgt, daß $DF(x, y)$ für alle $(x, y) \neq 0$ invertierbar ist.

Die Funktion F ist aber nicht global invertierbar, denn F ist nicht injektiv: Ist $F(x, y) = (a, b)$, so gilt auch $F(-x, -y) = (a, b)$.

Nun wollen wir das Urbild eines beliebigen Punktes $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ bestimmen: Sei $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ beliebig. Wir suchen die Menge alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $F(x, y) = (a, b)$. Es gilt

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \implies 2xy = b.$$

Wir untersuchen nun zwei Fälle:

$b \neq 0$ Dann gilt $y \neq 0$ und damit $x = \frac{b}{2y}$. Einsetzen in die erste Gleichung ergibt

$$\begin{aligned}
\frac{b^2}{4y^2} - y^2 = a \quad & \overset{y\neq 0}{\iff} \quad y^4 + ay^2 - \frac{b^2}{4} = 0 \\
& \implies \quad y^2 = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}} \\
& \overset{y^2>0}{\implies} \quad y^2 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}} \\
& \implies \quad y = \pm\sqrt{-\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \\
& \qquad\quad x = \pm\frac{b}{2\sqrt{-\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}}}
\end{aligned}$$

$b = 0$ Dann gilt $x = 0$ oder $y = 0$ (und $a \neq 0$). Ist $a > 0$, so muß $y = 0$ und $x = \pm\sqrt{a}$ gelten. Ist $a < 0$, so muß $x = 0$ und $y = \pm\sqrt{|a|}$ gelten.