Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Nada Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/2010
03.12.2009

8. Übungsblatt zur „Analysis II“

Gruppenübung

Aufgabe G1

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}, & \text{für } \ y>0, \\ -\sqrt{x^2+y^2}, & \text{für } \ y<0, \\ x, & \text{für } y=0. \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix $J_f(x,y)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $y \neq 0$.

b) Bestimmen Sie alle $v \in \mathbb{R}^2$ mit $\|v\| = 1$, für die die Richtungsableitungen $D_v f(0,0)$ existiert..

c) Ist f differenzierbar in $(0,0)$?

Lösung:

a) Für $y \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left[\sqrt{x^2+y^2}\right] &= \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-1/2} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \frac{\partial}{\partial y}\left[\sqrt{x^2+y^2}\right] &= \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-1/2} \cdot 2y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{aligned}$$

Somit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{für } y>0, \\ -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{für } y<0, \end{cases}$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{für } y>0, \\ -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{für } y<0. \end{cases}$$

Damit gilt

$$J_f(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x,y),\ \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\right).$$

b) Wir zeigen, dass die Richtungsableitung $D_v f(0,0)$ für alle Richtungen $v \in \mathbb{R}^2$ mit $\|v\| = 1$ existiert.

Sei $v := (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $\|v\| = 1$ und $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Es gibt 2 Fälle:

i) $v_2 = 0$. Dann gilt
$$\lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1, 0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{tv_1}{t} = v_1.$$

ii) $v_2 \neq 0$. Dann gilt
$$\frac{f(tv_1, tv_2) - f(0,0)}{t} = \begin{cases} \frac{\sqrt{t^2v_1^2+t^2v_2^2}}{t} = \sqrt{v_1^2+v_2^2}, & \text{falls } t > 0,\ v_2 > 0, \\ -\frac{\sqrt{t^2v_1^2+t^2v_2^2}}{t} = \sqrt{v_1^2+v_2^2}, & \text{falls } t < 0,\ v_2 > 0, \\ -\frac{\sqrt{t^2v_1^2+t^2v_2^2}}{t} = -\sqrt{v_1^2+v_2^2}, & \text{falls } t > 0,\ v_2 < 0, \\ \frac{\sqrt{t^2v_1^2+t^2v_2^2}}{t} = -\sqrt{v_1^2+v_2^2}, & \text{falls } t < 0,\ v_2 < 0. \end{cases}$$

Daraus folgt
$$D_v f(0,0) = \begin{cases} \sqrt{v_1^2+v_2^2}, & \text{für } v_2 > 0, \\ -\sqrt{v_1^2+v_2^2}, & \text{für } v_2 < 0, \\ v_1, & \text{für } v_2 = 0. \end{cases}$$

c) Angenommen f ist in $(0,0)$ differenzierbar. Dann müsste nach b) gelten, dass $Df(0,0) = (D_{e_1}f(0,0), D_{e_2}f(0,0)) = (1,1)$. Andererseits gilt für $h_n := \left(\frac{(-1)^n}{n}, \frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$ ((h_n) ist Nullfolge in $\mathbb{R}^2$):
$$\frac{f(h_n) - f(0,0) - (1,1)\cdot h_n}{\|h_n\|} = \frac{\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} - 0 - \frac{1}{n}((-1)^n+1)}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}}} = 1 - \frac{(-1)^n+1}{\sqrt{2}}.$$

Für $n \to \infty$ existiert kein Grenzwert. Dies steht im Widerspruch zur Definition.

Aufgabe G2

Es seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine k-mal stetig differenzierbare Funktion und $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit
$$p(x) := \sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha x^\alpha, \quad a_\alpha \in \mathbb{R}$$
ein Polynom vom Grad $\le k$.
Beweise die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(1) $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-p(h)}{\|h\|^k} = 0$,

(2) p ist das k-te Taylorpolynom von f (mit Entwicklungspunkt 0).

Lösung:

Es gilt nach dem Satz von Taylor mit einem $\tau \in [0,1]$:
$$f(h) = \sum_{|\alpha|\le k-1} \frac{1}{\alpha!}(D^\alpha f)(0)h^\alpha + \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!}(D^\alpha f(\tau h))h^\alpha =: T_{k-1}(h) + R(h).$$

„(1) $\Rightarrow$ (2)" Sei $q(h) := p(h) - T_k(h)$. Es ist $q = 0$ zu zeigen.
Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es nach (1) ein $\delta > 0$, so dass $|\frac{f(h)-p(h)}{\|h\|^k}| < \varepsilon$, falls $\|h\| < \delta$. Da $D^\alpha f$ für $|\alpha| = k$ stetig ist, kann man δ so wählen, dass $|D^\alpha f(\tau h) - D^\alpha f(0)| < \varepsilon$ für $\|h\| < \delta$, da $\tau \le 1$.

Man hat für $\|h\| < \delta$

$$\begin{aligned}
|q(h)| &= |p(h) - f(h) + T_{k-1}(h) + R(h) - T_k(h)| \\
&\le |p(h) - f(h)| + \left| \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \left((D^\alpha f(\tau h))h^\alpha - (D^\alpha f(0))h^\alpha\right) \right| \\
&\le \varepsilon\|h\|^k + \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \varepsilon \|h\|^{|\alpha|} \\
&= c\varepsilon\|h\|^k.
\end{aligned}$$

Also gilt $\frac{q(h)}{\|h\|^k} \to 0$. Wir schreiben $q(h) = \sum_{|\beta|\le k} b_\beta h^\beta$. Dann gilt für festes h und $t \in \mathbb{R}$

$$q(th) = \sum_{|\beta|\le k} b_\beta t^{|\beta|} h^\beta = \sum_{j=0}^{k} c(j,h) t^j$$

und

$$\frac{1}{|t|^i} q(th) \xrightarrow{t\to 0} 0 \quad \text{für} \quad i = 1, ..., k.$$

Angenommen, wir hätten schon gezeigt $c(j,h) = 0$ für $j = 0, ..., l$, $l < k$. Dann gilt

$$0 \xleftarrow{t\to 0} \frac{1}{t^{l+1}} q(th) = \sum_{j=l+1}^{k} c(j,h) t^{j-l} \xrightarrow{t\to 0} c(l+1,h).$$

Also ist $c(l+1,h) = 0$. Per Induktion folgt also (Der Induktionsanfang geht analog zum Induktionsschritt) $q(th) = 0$ für alle t und weil h beliebig war, gilt $q = 0$ und wir haben (2) bewiesen.
„(2) $\Rightarrow$ (1)" Sei $p(h) = T_k(h)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\|h\|^k} |f(h) - p(h)| &= \frac{1}{\|h\|^k} \left| \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} (D^\alpha f(\tau h) - D^\alpha f(0)) h^\alpha \right| \\
&\le \frac{1}{\|h\|^k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} |D^\alpha f(\tau h) - D^\alpha f(0)| \|h\|^{|\alpha|} \\
&\le \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} |D^\alpha f(\tau h) - D^\alpha f(0)| \\
&\xrightarrow{h\to 0} 0,
\end{aligned}$$

weil $D^\alpha f$ für $|\alpha| = k$ stetig ist.

Aufgabe G3

Bestimme die Taylor-Entwicklung der Funktion

$$f\colon (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$$

im Punkt $(1,1)$ bis einschließlich der Glieder 2. Ordnung.

Lösung:

Im Folgenden sei $\partial_x := \frac{\partial}{\partial x}$ usw.

Es gilt $f(x,y) = \frac{x+y-2y}{x+y} = 1 - 2\frac{y}{x+y}$ sowie $f(x,y) = \frac{2x-(x+y)}{x+y} = 2\frac{x}{x+y} - 1$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
D^{(1,0)}f(x,y) &= \partial_x f(x,y) = \frac{2y}{(x+y)^2} \\
D^{(0,1)}f(x,y) &= \partial_y f(x,y) = -\frac{2x}{(x+y)^2} \\
D^{(2,0)}f(x,y) &= \partial_x^2 f(x,y) = \frac{-4y}{(x+y)^3} \\
D^{(0,2)}f(x,y) &= \partial_y^2 f(x,y) = \frac{4x}{(x+y)^3} \\
D^{(1,1)}f(x,y) &= \partial_x\partial_y f(x,y) = \frac{2}{(x+y)^2} - \frac{4y}{(x+y)^3} = (2x-2y)/(x+y)^3.
\end{aligned}$$

Am Entwicklungspunkt $(1,1)$ erhalten wir somit:

$$f(1,1) = 0, \quad D^{(1,0)}f(1,1) = \frac{1}{2}, \quad D^{(0,1)}f(1,1) = -\frac{1}{2}$$

$$D^{(2,0)}f(1,1) = -\frac{1}{2}, \quad D^{(0,2)}f(1,1) = \frac{1}{2}, \quad D^{(1,1)}f(1,1) = 0.$$

Die Glieder der Taylorreihe bis zur 2. Ordnung sind:

$$\begin{aligned}
& \sum_{|\alpha|\le 2} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(1,1)((x,y)-(1,1))^\alpha \\
= \; & f(1,1) + D^{(1,0)}f(1,1)(x-1) + D^{(0,1)}f(1,1)(y-1) \\
& + D^{(1,1)}f(1,1)(x-1)(y-1) + \frac{1}{2}D^{(2,0)}f(1,1)(x-1)^2 \\
& + \frac{1}{2}D^{(0,2)}f(1,1)(y-1)^2 \\
= \; & \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2}(y-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{4}(y-1)^2.
\end{aligned}$$

Hausübung

Die Hausaufgaben H2 und H3 a) sind als Präsentationsaufgaben geeignet!

Aufgabe H1 (3+3 Punkte)

Gegeben seien die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = x^2 \sin\frac{xy}{2} \quad \text{bzw.} \quad g(x,y) = x^2 - \cos\frac{x}{y}.$$

(a) Entwickeln Sie f nach der Taylor'schen Formel für $n = 2$ um $(1,\pi)$ (ohne das Restglied R_2 zu bestimmen).

(b) Entwickeln Sie g nach der Taylor'schen Formel für $n = 2$ um $(\pi,1)$ (ohne das Restglied R_2 zu bestimmen).

Lösung:

(a) Als erstes bestimmen wir die partiellen Ableitungen von f bis einschließlich 2. Ordnung:

$$\begin{aligned}
&\partial_x f(x,y) = 2x\sin\frac{xy}{2} + \frac{x^2y}{2}\cos\frac{xy}{2}, \quad \partial_y f(x,y) = \frac{x^3}{2}\cos\frac{xy}{2}\\
&\partial_x^2 f(x,y) = 2\sin\frac{xy}{2} + 2xy\cos\frac{xy}{2} - \frac{x^2y^2}{4}\sin\frac{xy}{2}, \quad \partial_x\partial_y f(x,y) = \frac{3}{2}x^2\cos\frac{xy}{2} - \frac{x^3y}{4}\sin\frac{xy}{2}\\
&\partial_y^2 f(x,y) = -\frac{x^4}{4}\sin\frac{xy}{2}
\end{aligned}$$

Nun bestimmen wir die Werte der Funktion und der partiellen Ableitungen an der Stelle $(1,\pi)$:

$$\begin{aligned}
f(1,\pi) = 1, \quad \partial_x f(1,\pi) = 2, \quad \partial_y f(1,\pi) = 0\\
\partial_x^2 f(1,\pi) = 2 - \frac{\pi^2}{4}, \quad \partial_x\partial_y f(1,\pi) = -\frac{\pi}{4}, \quad \partial_y^2 f(1,\pi) = -\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Einsetzen in die Taylor'sche Formel ergibt (mit $h = (\Delta x, \Delta y)$):

$$\begin{aligned}
f(1+\Delta x, \pi+\Delta y) &= 1 + 2\Delta x + 0\cdot\Delta y + \frac{1}{2}\left((2-\frac{\pi^2}{4})\Delta x^2 - 2\cdot\frac{\pi}{4}\Delta x\Delta y - \frac{1}{4}\Delta y^2\right)\\
&\quad + r_2(1,\pi)\\
&= 1 + 2\Delta x + (1-\frac{\pi^2}{8})\Delta x^2 - \frac{\pi}{4}\Delta x\Delta y - \frac{1}{8}\Delta y^2 + r_2(1,\pi).
\end{aligned}$$

(b) Als erstes bestimmen wir die partiellen Ableitungen von g bis einschließlich 2. Ordnung:

$$\begin{aligned}
&\partial_x g(x,y) = 2x + \frac{1}{y}\sin\frac{x}{y}, \quad \partial_y g(x,y) = -\frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y}\\
&\partial_x^2 g(x,y) = 2 + \frac{1}{y^2}\cos\frac{x}{y}, \quad \partial_x\partial_y g(x,y) = -\frac{1}{y^2}\sin\frac{x}{y} - \frac{x}{y^3}\cos\frac{x}{y}\\
&\partial_y^2 g(x,y) = \frac{2x}{y^3}\sin\frac{x}{y} + \frac{x^2}{y^4}\cos\frac{x}{y}
\end{aligned}$$

Nun bestimmen wir die Werte der Funktion und der partiellen Ableitungen an der Stelle $(\pi,1)$:

$$\begin{aligned}
g(\pi,1) = \pi^2+1, \quad \partial_x g(\pi,1) = 2\pi, \quad \partial_y g(\pi,1) = 0\\
\partial_x^2 g(\pi,1) = 1, \quad \partial_x\partial_y g(\pi,1) = \pi, \quad \partial_y^2 g(\pi,1) = -\pi^2.
\end{aligned}$$

Einsetzen in die Taylor'sche Formel ergibt:

$$\begin{aligned}
g(\pi+\Delta x, 1+\Delta y) &= \pi^2 + 1 + 2\pi\Delta x + 0\cdot\Delta y + \frac{1}{2}\left(1\cdot\Delta x^2 + 2\pi\Delta x\Delta y - \pi^2\Delta y^2\right) + r_2(\pi,1)\\
&= \pi^2 + 1 + 2\pi\Delta x + \frac{1}{2}\Delta x^2 + \pi\Delta x\Delta y - \frac{\pi^2}{2}\Delta y^2 + r_2(\pi,1).
\end{aligned}$$

Aufgabe H2 (5 Punkte)

Sei $f : (0,\infty)\times(0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^y$. Berechnen Sie das Taylorpolynom der Ordnung 2 von f im Punkt $(1,1)$. Schätzen Sie mit Hilfe des Restgliedes R_3 den Fehler ab, der entsteht, wenn Sie $1.05^{1.02}$ mit diesem Taylorpolynom berechnen.

Lösung: Für die partiellen Ableitungen ergibt sich

$$\begin{aligned}
\partial_x f(x,y) &= yx^{y-1}\\
\partial_x^2 f(x,y) &= y(y-1)x^{y-2}\\
\partial_x^3 f(x,y) &= y(y-1)(y-2)x^{y-3}\\
\partial_y f(x,y) &= (\ln x)x^y\\
\partial_y^2 f(x,y) &= (\ln x)^2 x^y\\
\partial_y^3 f(x,y) &= (\ln x)^3 x^y\\
\partial_x\partial_y f(x,y) &= x^{y-1} + (\ln x)yx^{y-1}\\
\partial_x\partial_y^2 f(x,y) &= 2(\ln x)x^{y-1} + (\ln x)^2 yx^{y-1}\\
\partial_y\partial_x^2 f(x,y) &= (2y-1)x^{y-2} + (\ln x)y(y-1)x^{y-2}
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir für den Entwicklungspunkt $(1,1)$:

$f(1,1) = \partial_x f(1,1) = \partial_x\partial_y f(1,1) = 1$ and $\partial_y f(1,1) = \partial_x^2 f(1,1) = \partial_y^2 f(1,1) = 0$. Die Glieder der Taylorreihe bis zur 2. Ordnung sind, damit

$$1 + (x-1) + (x-1)(y-1)$$

$$f(1.05, 1.02) \approx 1.051$$

Um den Fehler abzuschätzen, nutzen wir aus, dass $\ln x \le x - 1$ für $x \ge 1$:

$$\begin{aligned}
&|\partial_x^3 f| \le 1.02 \cdot 0.02 = 2.04 \cdot 10^{-2} && |\partial_x\partial_y^2 f| \le 2 \cdot 0.05 \cdot 1.05 + (0.05)^2 \cdot 1.02 \cdot 1.05 \le 1.34 \cdot 10^{-4}\\
&|\partial_x^2\partial_y f| \le 1.04 + 0.05 \cdot 1.02 \cdot 0.02 \le 1.05 && |\partial_y^3 f| \le (0.05)^3 \cdot 1.05^2 \le 1.4 \cdot 10^{-4}
\end{aligned}$$

Mit $h = (0.05, 0.02)$ läßt sich das Restglied (und somit der Fehler) folgendermaßen abschätzen:

$$\begin{aligned}
|R_3 f((1.05,1.02),(1,1))| &= \Big|\sum_{|\alpha|=3} \frac{1}{\alpha!}(D^\alpha f(\tau h))\, h^\alpha\Big|\\
&\le \frac{1}{3!} \cdot 2.04 \cdot 10^{-2} \cdot (0.05)^3 + \frac{1}{2!} \cdot 1.05 \cdot (0.05)^2 \cdot 0.02\\
&\quad + \frac{1}{2!} \cdot 1.34 \cdot 10^{-4} \cdot 0.05 \cdot (0.02)^2 + \frac{1}{3!} \cdot 1.4 \cdot 10^{-4} \cdot (0.02)^3\\
&\le 2.68 \cdot 10^{-5}
\end{aligned}$$

Aufgabe H3 (4+2 Punkte)

Es sei U eine offene, konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, deren partiellen Ableitungen $D_i f$ beschränkte Funktionen sind, für $i = 1, \dots, n$.

a) Zeigen Sie, dass f gleichmäßig stetig ist (und sogar Lipschitz-stetig).

b) Zeigen Sie durch ein Beispiel im Fall $n = 1$ (oder $n = 2$), dass die Konklusion von a) im allgemeinen falsch wird, wenn U zwar offen, aber nicht konvex ist.

Hinweis: Konvex heißt, dass mit je zwei Punkten aus U auch deren Verbindungsstrecke in U liegt.

Lösung:
Wir wählen auf $\mathbb{R}^n$ die ∞-Norm.

a) Per Voraussetzung gibt es eine reelle Zahl $K > 0$ derart, dass für alle $x \in U$ und alle $i = 1, \ldots, n$ die Abschätzung $|D_i f(x)| \leq K$ gilt.
Sind nun $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_n)$ Elemente von U, so ist wegen der Konvexität von U die Verbindungsstrecke von x und y ganz in U enthalten. Nach Satz 10.18. gilt nun für ein $\tau \in (0, 1)$:

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) = f(x + (y - x)) - f(x) &= f'(x + \tau \cdot (y - x))(y - x) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (D_i f)(x + \tau \cdot (y - x)) \cdot (y_i - x_i). \end{aligned}$$

Es ist also

$$|f(y) - f(x)| \leq \sum_{i=1}^{n} |(D_i f)(x + \tau \cdot (y - x))| \cdot |y_i - x_i| \leq n \cdot K \cdot \|y - x\|_\infty$$

für alle $x, y \in U$. Außerdem ist somit f Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L := n \cdot K$.

Als Lipschitz-stetige Funktion ist f insbesondere gleichmäßig stetig: Gegeben $\varepsilon > 0$: $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $x, y \in U$ mit $\|y - x\|_\infty < \delta := \frac{\varepsilon}{L}$.

b) Auf offenen Teilmengen $U := \mathbb{R} \backslash \{0\} \subseteq \mathbb{R}$ betrachten wir die Funktion

$$f : U \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0 \\ 1 & \text{falls } x > 0 \end{cases}.$$

Weil f auf den offenen Mengen $(-\infty, 0)$ und $(0, \infty)$ konstant ist, welche U überdecken, ist $f' = 0$ die Nullfunktion und damit beschränkt. Allerdings ist f nicht gleichmäßig stetig. Wähle $\varepsilon := \frac{1}{2}$, dann sind für beliebiges $\delta > 0$ die Zahlen $\pm\frac{\delta}{4}$ in U. Es gilt $|\frac{\delta}{4} - (-\frac{\delta}{4})| = \frac{\delta}{2} < \delta$, jedoch $|f(\frac{\delta}{2}) - f(-\frac{\delta}{2})| = 1 > \varepsilon$.