Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Nada Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/2010
26.11.2009

7. Übungsblatt zur „Analysis II“

Gruppenübung

Aufgabe G1

a) Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen. Beweisen Sie $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathrm{u} = 0$ für alle zwei mal stetig differenzierbaren $u : U \to \mathbb{R}^3$.

b) Gegeben sei eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Wir definieren eine Funktion $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch $g(x, y, z) := f(x - y, y - z, z - x)$. Zeigen Sie, dass g differenzierbar ist und dass gilt

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} = 0.$$

Lösung:

a) Nach dem Satz von Schwarz gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\operatorname{rot} u &= \operatorname{div}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

b) g ist differenzierbar, da die Funktion aus differenzierbaren Funktionen besteht und auf Grund der Kettenregel.

Wir definieren $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch $h(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x)$.

Dann gilt $g = f \circ h$. Es ist

$$\frac{\partial h}{\partial x} = (1, 0, -1), \quad \frac{\partial h}{\partial y} = (-1, 1, 0) \quad \text{und} \quad \frac{\partial h}{\partial z} = (0, -1, 1).$$

Mit der Kettenregel ergibt sich

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z) &= \cdots = \frac{\partial f}{\partial x}(h(x, y, z)) - \frac{\partial f}{\partial z}(h(x, y, z)) \\
\frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z) &= \cdots = -\frac{\partial f}{\partial x}(h(x, y, z)) + \frac{\partial f}{\partial y}(h(x, y, z)) \\
\frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) &= \cdots = -\frac{\partial f}{\partial y}(h(x, y, z)) + \frac{\partial f}{\partial z}(h(x, y, z))
\end{aligned}$$

Damit folgt direkt die Behauptung.

Aufgabe G2

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := \begin{cases} (x^2+y^2)\cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{für } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{für } (x,y) = 0 \end{cases}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass

a) $\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $\frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ existieren, im Nullpunkt aber nicht stetig sind.

b) f im Nullpunkt differenzierbar ist.

Lösung:

a) Sei $(x,y) \neq (0,0)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 2x\sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}) + (x^2+y^2)\cos(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})(-\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}^3}) \\ &= 2x\sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}) - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}).\end{aligned}$$

Sei $y = 0$. Dann hat man

$$\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \frac{h^2 \sin\frac{1}{|h|}}{h} = h\sin\frac{1}{|h|} \xrightarrow{h\to 0} 0.$$

Somit ist existiert die partielle Ableitung nach x.

Sei $a_n = (\frac{1}{2n\pi}, 0)$. Dann gilt $a_n \to (0,0)$ aber

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a_n) = 0 - \cos 2n\pi = 1 \xrightarrow{n\to\infty} 1 \neq 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0).$$

Also ist $\frac{\partial f}{\partial x}$ unstetig.

Für die Ableitung nach y geht alles analog.

b) Wir zeigen nun, dass die Fréchetableitung 0 ist. Es gilt für $h = (h_1,h_2) \neq (0,0)$

$$\frac{f(h)}{\|h\|} = \frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\left|(h_1^2+h_2^2)\cdot\sin\left(\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right)\right| \leq \sqrt{h_1^2+h_2^2} \xrightarrow{h\to 0} 0$$

Also gilt

$$f(0+h) = 0 + 0h + f(h) = f(0,0) + f'(0,0)h + f(h)$$

und f ist in $(0,0)$ differenzierbar.

Aufgabe G3

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine Abbildung der Form $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, wobei $x,y \in \mathbb{R}$ und u, v reellwertige Funktionen sind. Identifiziert man nun 1 mit $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und i mit $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, kann man auch

$$f : \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$$

schreiben.

a) (i) Schreiben Sie die linearen Abbildungen $A_1 : z \mapsto \overline{z}$ und $A_2 : z \mapsto iz$ als reelle 2×2-Matrizen.
Entscheiden Sie, ob die beiden Abbildungen auch $\mathbb{C}$-linear sind, das heißt, ob $A_k cz = cA_k z$ für $k = 1, 2$, und alle $c, z \in \mathbb{C}$ gilt.

(ii) Berechnen Sie die Jakobi-Matrizen der Abbildungen

$$z \mapsto |z|^2 \quad \text{und} \quad z \mapsto (z - i)z.$$

b) Beweisen Sie, dass eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gerade einer Multiplikation mit einer komplexen Zahl entspricht.
Bestimmen Sie die Matrixdarstellung der Multiplikation mit einer Zahl $c = a + ib$.

Lösung:
a)

(i) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. A_1 ist nicht $\mathbb{C}$-linear, denn $A_1(iz) = \overline{iz} = -i\overline{z} \neq iA_1(z)$. $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
A_2 is $\mathbb{C}$-linear, weil die Multiplikation in $\mathbb{C}$ kommutativ ist.

(ii) $f : z \mapsto |z|^2$, $J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
$g : z \mapsto (z - i)z$, also $g(x + iy) = (x^2 - y(y - 1)) + i(x(y - 1) + xy)$ und damit gilt $J_g(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y + 1 \\ 2y - 1 & 2x \end{pmatrix}$.

b) Sei $A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung. Sei $c := A1$. Dann gilt $Az = A(z1) = zA1 = cz$.

$$(a + ib)(1 + 0i) = a + ib \quad \text{und} \quad (a + ib)(0 + i) = -b + ia.$$

Also: Die Matrixdarstellung von $B : z \mapsto (a + ib)z$ ist $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

Hausübung

Die Hausaufgaben H1 und H2 b) sind als Präsentationsaufgaben geeignet!

Aufgabe H1 (5 Punkte)

Gegeben seien die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \cos(xy) \quad \text{und} \quad g(x, y) = e^{x-y}$$

und die Koordinatentransformation

$$\tilde{x}(u, v) = 2u - v \quad \text{und} \quad \tilde{y}(u, v) = 2u + v.$$

Bestimmen Sie für

$$\tilde{f}(u, v) = f(\tilde{x}(u, v), \tilde{y}(u, v)) \quad \text{bzw.} \quad \tilde{g}(u, v) = g(\tilde{x}(u, v), \tilde{y}(u, v))$$

mit $\tilde{f}, \tilde{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die partiellen Ableitungen mit Hilfe der Kettenregel.

Lösung:
Für die Koordinatentransformation gilt

$$\begin{aligned} \tilde{x}_u(u, v) &= 2 \quad \text{und} \quad \tilde{x}_v(u, v) = -1 \\ \text{bzw.} \quad \tilde{y}_u(u, v) &= 2 \quad \text{und} \quad \tilde{y}_v(u, v) = 1. \end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen von f lauten

$$f_x(x,y) = -y\sin(xy) \quad \text{und} \quad f_y(x,y) = -x\sin(xy).$$

Damit ergibt sich für die Funktion $\tilde{f}$

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_u(u,v) &= f_x(\tilde{x}(u,v),\tilde{y}(u,v))\ \tilde{x}_u(u,v) + f_y(\tilde{x}(u,v),\tilde{y}(u,v))\ \tilde{y}_u(u,v)\\
&= [-(2u+v)\ \sin((2u-v)(2u+v))]\cdot 2 + [-(2u-v)\ \sin((2u-v)(2u+v))]\cdot 2\\
&= -2(2u+v+2u-v)\ \sin(4u^2-v^2) = -8u\ \sin(4u^2-v^2),\\
\tilde{f}_v(u,v) &= f_x(\tilde{x}(u,v),\tilde{y}(u,v))\ \tilde{x}_v(u,v) + f_y(\tilde{x}(u,v),\tilde{y}(u,v))\ \tilde{y}_v(u,v)\\
&= [-(2u+v)\ \sin((2u-v)(2u+v))]\cdot(-1) + [-(2u-v)\ \sin((2u-v)(2u+v))]\cdot 1\\
&= (2u+v-2u+v)\ \sin(4u^2-v^2) = 2v\ \sin(4u^2-v^2).
\end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen von g lauten

$$g_x(x,y) = e^{x-y} \quad \text{und} \quad g_y(x,y) = -e^{x-y}.$$

Damit ergibt sich für die Funktion $\tilde{g}$

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_u(u,v) &= g_x(\tilde{x}(u,v),\tilde{y}(u,v))\ \tilde{x}_u(u,v) + g_y(\tilde{x}(u,v),\tilde{y}(u,v))\ \tilde{y}_u(u,v)\\
&= e^{(2u-v)-(2u+v)}\cdot 2 + (-e^{(2u-v)-(2u+v)})\cdot 2 = 0,\\
\tilde{g}_v(u,v) &= g_x(\tilde{x}(u,v),\tilde{y}(u,v))\ \tilde{x}_v(u,v) + g_y(\tilde{x}(u,v),\tilde{y}(u,v))\ \tilde{y}_v(u,v)\\
&= e^{(2u-v)-(2u+v)}\cdot(-1) + (-e^{(2u-v)-(2u+v)})\cdot 1 = -2e^{-2v}.
\end{aligned}$$

Aufgabe H2 (5+5 Punkte)

a) Begründen Sie, dass die Ableitungen der folgenden Funktionen existieren und bestimmen Sie diese:

(i) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (xy, \cosh(xy), \log(1+x^2))$

(ii) $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $g(x,y,z) = (x\sin(y)\cos(z), x\sin(y)\sin(z), x\cos(y))$

b) Sei $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definiert durch

$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

Geben Sie alle Punkte $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ an, in denen h differenzierbar ist.

Lösung:

a) Mit Satz 10.11 und 10.9 gilt (ausführlicher!)

(i)

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} y & x\\ y\sinh(xy) & x\sinh(xy)\\ \frac{2x}{1+x^2} & 0 \end{pmatrix}$$

(ii)

$$J_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} \sin(y)\cos(z) & x\cos(y)\cos(z) & -x\sin(y)\sin(z)\\ \sin(y)\sin(z) & x\cos(y)\sin(z) & x\sin(y)\cos(z)\\ \cos(y) & -x\sin(y) & 0 \end{pmatrix}$$

b): Für $(x,y) \neq (0,0)$ gilt

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \frac{3x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^4}{\sqrt{x^2+y^2}^3}$$

und

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \frac{-x^3 y}{\sqrt{x^2+y^2}^3}.$$

Für $(x,y) \neq (0,0)$ sind die partiellen Ableitungen stetig, daher gilt mit Satz 10.11, dass f in $(x,y) \neq (0,0)$ differenzierbar ist.

Für $(x,y) = (0,0)$ gilt

$$\frac{\partial h}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{h(t,0)-h(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3}{t^2} = 0$$

und

$$\frac{\partial h}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{h(0,t)-h(0,0)}{t} = \frac{0}{t} = 0.$$

Daher ist ein Kandidat für die Ableitung von h in $(0,0)$ der Vektor $(0,0)$. Da für $t = (t_1,t_2) \neq (0,0)$

$$\frac{h(t_1,t_2) - h(0,0) - \langle (0,0),(t_1,t_2)\rangle}{\|t\|} = \frac{t_1^3}{t_1^2+t_2^2} \to 0 \qquad \text{für } (t_1,t_2) \to (0,0)$$

erhalten wir, dass h in $(0,0)$ differenzierbar ist.

Damit gilt, dass h in jedem Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ differenzierbar ist.

Aufgabe H3 (5 Punkte)

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ in $z_0 = x_0 + iy_0$ differenzierbar als Abbildung auf $\mathbb{R}^2$. Bekanntlich ist die Ableitung $f'(z_0)$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung. Beweisen Sie:
$f'(z_0)$ ist genau dann $\mathbb{C}$-linear, wenn die sogenannten Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$$

erfüllt sind.

Lösung:
Sei $f'(z_0)$ $\mathbb{C}$-linear. Dann entspricht $f'(z_0)$ einer Multiplikation mit einer Konstanten $a+ib$, Also

$$f'(z_0)\binom{h_1}{h_2} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \binom{h_1}{h_2}.$$

Also gilt

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix} = f'(z_0) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

und somit gilt

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = a = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -b = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0).$$

Seien umgekehrt die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt. Dann gilt

$$f'(z_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) & -\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

was der Multiplikation mit der komplexen Zahl $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$ entspricht, und das ist natürlich $\mathbb{C}$-linear.