Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Nada Sissouno

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2009/2010
19.11.2009

6. Übungsblatt zur „Analysis II“

Gruppenübung

Aufgabe G1

a) Es seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B = (2, -4, 6), \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie alle möglichen Matrizenprodukte mit zwei Faktoren.

b) Finden Sie quadratische Matrizen A, B, C, D gleicher Dimension für die $AB \neq BA$, $CD = DC$ und $C \neq D$ gilt.

Lösung: a) Die möglichen Produkte sind

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 4 & -8 & 12 \\ 6 & -12 & 18 \end{pmatrix}, \quad BA = 12, \quad BC = (-30, 10),$$

$$DA = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad DC = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & -1 \\ -1 & -3 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = BA.$$

Weiter sei

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $C \neq D$ und

$$CD = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = DC.$$

Aufgabe G2

Nach Satz 10.1 sind alle Normen auf einem endlichdimensionalen Vektorraum äquivalent. Wir betrachten jetzt speziell die Normen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathbb{R}^n$.

a) Sei $v = (1, 8, -4, 0)$. Berechnen Sie $\|v\|_1$, $\|v\|_2$ und $\|v\|_\infty$.

b) Zeichnen Sie für $n = 2$ die Einheitskreise für alle drei Normen, das heißt die Mengen

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ \|x\|_* < 1\}, \quad \text{wobei } * = 1, 2, \infty.$$

c) Geben Sie Äquivalenzkonstanten für $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|_\infty \sim \|\cdot\|_2$ an. Sind die von Ihnen gewählten Konstanten die bestmöglichen?

Lösung:

a) $\|v\|_1 = 13$, $\|v\|_2 = 9$, $\|v\|_\infty = 8$.

b) !!!!!

c)

$$\frac{1}{n}\|x\|_1 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |x_k| \leq \frac{1}{n} n \|x\|_\infty \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| = \|x\|_1,$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_2 = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^{n} \|x\|_\infty^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|x\|_\infty \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|x\|_2,$$

$$\frac{1}{n}\|x\|_1 \leq \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty \leq \sqrt{n}\|x\|_1.$$

Aufgabe G3

Für $r \geq 0$ und $\varphi \in \mathbb{R}$ wird durch $h(r, \varphi) := r^2 \sin 4\varphi$ eine Funktion $h : [0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert.

a) Bestimmen Sie eine Funktion $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ so, dass $h(r, \varphi) = H(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ für jedes Paar $(r, \varphi) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}$ gilt.

b) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen dieser Funktion in jedem Punkt. Sind diese überall stetig?

c) Zeigen Sie, dass H auch zweimal partiell differenzierbar ist.

Lösung:

a) Anwendung von Additionstheoremen liefert: $\sin 4\varphi = 4 \sin \varphi \cos \varphi (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)$.

Setze: $x := r \cos \varphi$, $y := \sin \varphi$.
Damit gilt:

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Somit kann H folgendermaßen gewählt werden:

$$H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ H(x, y) = \begin{cases} \frac{4xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

b) Es gilt $\frac{\partial H}{\partial x}(0, 0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{H(h,0) - H(0,0)}{h} = 0$.

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{4y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Analog ergibt sich:

$$\frac{\partial H}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{4x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Für $(x,y) \neq (0,0)$ sind die partiellen Ableitungen offenbar stetig. Bleibt der Punkt $(0,0)$. Wir setzen $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$:

$$\frac{\partial H}{\partial x}(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \begin{cases} 4r\sin\varphi\,(\cos^4\varphi - 4\cos^2\varphi\sin^2\varphi - \sin^4\varphi) & \text{für } (r,\varphi) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Da $r = \sqrt{x^2+y^2}$, gilt für $(x,y) \to (0,0)$, dass $r \to 0$. Damit folgt:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{4y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} \right) = \lim_{r\to 0}(4r\sin\varphi\,(\cos^4\varphi - 4\cos^2\varphi\sin^2\varphi - \sin^4\varphi)) = 0$$

$\Rightarrow$ $\frac{\partial H}{\partial x}$ ist stetig auf ganz $\mathbb{R}^2$. Analog ist auch $\frac{\partial H}{\partial y}$ stetig auf ganz $\mathbb{R}^2$. (Daraus folgt, dass H einmal stetig differenzierbar ist!)

c) Die 2. partiellen Ableitungen ex. offensichtlich auf $\mathbb{R}^2\backslash\{0,0\}$ und in $(0,0)$ gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial H}{\partial x}(h,0) - \frac{\partial H}{\partial x}(0,0)}{h} = 0 \\
\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial H}{\partial y}(0,h) - \frac{\partial H}{\partial y}(0,0)}{h} = 0 \\
\frac{\partial^2 H}{\partial x\partial y}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial H}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial H}{\partial y}(0,0)}{h} = 4 \\
\frac{\partial^2 H}{\partial y\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial H}{\partial x}(0,h) - \frac{\partial H}{\partial x}(0,0)}{h} = -4
\end{aligned}$$

Damit existieren die 2. partiellen Ableitungen auch in $(0,0)$.
$\Rightarrow$ H ist zweimal partiell differenzierbar. (Aber es gilt: H ist NICHT zweimal stetig differenzierbar!)

Hausübung

Die Hausaufgaben H2 und H3 sind als Präsentationsaufgaben geeignet!

Aufgabe H1 (5+6 Punkte)

i) Beweisen Sie, dass zwei Normen $\|\cdot\|_\alpha$ und $\|\cdot\|_\beta$ auf einem Vektorraum V genau dann äquivalent sind, wenn sie die gleichen offenen Mengen liefern.

ii) Beweisen Sie Folgerung 10.2 aus der Vorlesung.

Lösung:

i) Seien die offenen Mengen, die $\|\cdot\|_\alpha$ und $\|\cdot\|_\beta$ erzeugen, gleich.

- Sei $B_{1,\alpha}$ die Einheitskugel bezüglich $\|\cdot\|_\alpha$ und
- sei $B_{1,\beta}$ die Einheitskugel bezüglich $\|\cdot\|_\beta$.

Da $B_{1,\alpha}$ bezüglich $\|\cdot\|_\alpha$ offen ist, ist sie auch offen bezüglich $\|\cdot\|_\beta$. Da $0 \in B_{1,\alpha}$ gibt es ein $\varrho > 0$, so dass

$$\varrho\, B_{1,\beta} = \{y \in V \mid \|y\|_\beta < \rho\} \subset B_{1,\alpha}.$$

Sei nun $x \in V$ beliebig. Dann gilt

$$\varrho \frac{x}{2\,\|x\|_\beta} \in \rho\, B_{1,\beta} \subset B_{1,\alpha}.$$

Also

$$\left\| \varrho \frac{x}{2\,\|x\|_\beta} \right\|_\alpha \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \|x\|_\alpha \leq \frac{2}{\rho}\,\|x\|_\beta.$$

Analog (indem man die Rollen von $\|\cdot\|_\alpha$ und $\|\cdot\|_\beta$ vertauscht) zeigt man, dass es ein $c > 0$ gibt mit $\|x\|_\beta \leq c\|x\|_\alpha$.

$\Rightarrow$ Die beiden Normen sind äquivalent.

Seien nun die beiden Normen äquivalent und U eine offene Menge bezüglich $\|\cdot\|_\alpha$. Wegen der Äquivalenz können wir $\|x\|_\beta \geq c\|x\|_\alpha$ für alle $x \in V$ annehmen.
Sei $x \in U$. Dann existiert eine Kugel mit Radius ε und Mittelpunkt x, $B_{\varepsilon,\alpha}(x) \subset U$. Weiter gilt

$$B_{\frac{\varepsilon}{c},\beta}(x) \subset B_{\varepsilon,\alpha}(x) \subset U,$$

denn für $y \in B_{\frac{\varepsilon}{c},\beta}(x)$ gilt $\|x-y\|_\alpha \leq c\|x-y\|_\beta \leq c\,\frac{\varepsilon}{c}$. Also ist U auch offen bezüglich $\|\cdot\|_\beta$.

Das offene Mengen bezüglich $\|\cdot\|_\beta$ auch offen bezüglich $\|\cdot\|_\alpha$ sind, zeigt man analog.

ii)

a) Wir zeigen zunächst, dass $\mathbb{R}^n$ vollständig bezüglich $\|\cdot\|_1$ ist.
Sei (x_k) eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}^n$. Sei $(x_k^{(j)})$ die Folge der j-ten Komponenten von x_k. Dann gilt

$$|x_k^{(j)} - x_i^{(j)}| \leq \|x_k - x_i\|_1 \xrightarrow{i,k\to\infty} 0.$$

Weil Cauchyfolgen in $\mathbb{R}$ konvergieren, gilt $x_k^{(j)} \to x^{(j)}$.

$$\|x_k - x\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_k^{(j)} - x^{(j)}| \to 0.$$

Also ist $\mathbb{R}^n$ bezüglich $\|\cdot\|_1$ vollständig.

Auch folgendes ist möglich:
Laut Satz 4.14 ist $\mathbb{R}^n$ bzgl. des euklidischen Abstandes vollständig.

Sei nun $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^n$. Wegen Satz 10.1 ist diese äquivalent zu $\|\cdot\|_1$ (bzw. zum euklidischen Abstand). Sei (x_k) eine Cauchyfolge bezüglich $\|\cdot\|$. Dann gilt

$$\|x_k - x_j\|_1 \leq c\|x_k - x_j\| \xrightarrow{k,j\to\infty} 0.$$

Somit ist (x_k) auch eine Cauchyfolge bezüglich $\|\cdot\|_1$. Also gilt $x_k \to x$ bezüglich $\|\cdot\|_1$. Es folgt

$$\|x_k - x\| \leq c_2\|x_k - x\|_1 \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

Somit konvergiert die Folge auch bezüglich $\|\cdot\|$.

b) wie in a).

c) folgt sofort aus i).

d) Folgt sofort aus c), wenn man die Definition, dass Urbilder offener Mengen offen sind, verwendet.

Aufgabe H2 (4 Punkte)

Sei $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung und $\|A\|$ die durch $\|\cdot\|_1$ induzierte Operatornorm. Sei $(a_{i,j})$ eine Matrixdarstellung für A. Finden Sie eine Formel für $\|A\|$. Orientieren Sie sich an der Formel für die durch $\|\cdot\|_\infty$ induzierte Operatornorm.

Hinweis:
Schätzen Sie zuerst $\|Ax\|_1$ für beliebiges $x \in \mathbb{R}^n$ ab. Wählen Sie danach einen geeigneten kanonischen Einheitsvektor, um die Formel für $\|A\|$ zu bestimmen.

Lösung: Wir zeigen

$$\|A\| = \max_{1\leq k\leq n} \sum_{j=1}^{m} |a_{j,k}|.$$

Für beliebiges x gilt

$$\|Ax\|_1 = \left\| \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} a_{1,k}x_k \\ \vdots \\ a_{m,k}x_k \end{pmatrix} \right\|_1 \leq \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} |a_{j,k}x_k| = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \sum_{j=1}^{m} |a_{j,k}| \leq \left(\max_{1\leq k\leq n} \sum_{j=1}^{m} |a_{j,k}| \right) \|x\|_1.$$

Sei nun k_0 so gewählt, dass $\sum_{j=1}^{m} |a_{j,k_0}| = \max_{1\leq k\leq n} \sum_{j=1}^{m} |a_{j,k}|$. Dann hat man für $x = e_{k_0}$ (der k_0-te kanonische Einheitsvektor)

$$\|Ax\|_1 = \left\| \begin{pmatrix} a_{1,k_0} \\ \vdots \\ a_{m,k_0} \end{pmatrix} \right\|_1 = \sum_{j=1}^{m} |a_{j,k_0}| = \max_{1\leq k\leq n} \sum_{j=1}^{m} |a_{j,k}|.$$

Somit folgt die Behauptung.

Aufgabe H3 (3+3 Punkte)

a) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$. Bestimmen Sie alle Punkte, in denen f partiell differenzierbar ist und bestimmen Sie dort die partiellen Ableitungen.

b) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \langle Ax + b, x\rangle$, wobei A eine $n \times n$ reelle Matrix ist und $b \in \mathbb{R}^n$. Berechnen Sie den Gradienten von f. Untersuchen Sie die partiellen Ableitungen auf Stetigkeit.

Hinweis:
Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Ist $f : U \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar, so heißt der Vektor

$$(grad\, f)(x) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right) \in \mathbb{R}^n$$

der *Gradient* von f in x.

Lösung:
a) $f(x,y) = \sqrt{|xy|} = \sqrt{|y|}\sqrt{|x|}$

Wir betrachten die partielle Ableitung nach x. Für (x,y) mit $x \neq 0$ gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sqrt{|y|} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(\sqrt{|x|}) = \sqrt{|y|} \cdot \begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x}} & \text{falls } x > 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{1}{x}} & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{|y|}{x}} & \text{falls } x > 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{|y|}{x}} & \text{falls } x < 0 \end{cases}.$$

Für $(0,y)$ sind zwei Fälle zu betrachten:

1) $y = 0$. Es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0.$$

2) $y \neq 0$. Es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,y) - f(0,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{|hy|}}{h} = \sqrt{|y|} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{|h|}}{h} \to \infty.$$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ analog!

Die partiellen Ableitungen ex. für alle $(x,y) \in \left(\mathbb{R}^2 \setminus \{\{0\} \times \mathbb{R} \text{ und } \mathbb{R} \times \{0\}\}\right) \cup \{(0,0)\}$.

b) $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}$ und $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$.

$\Rightarrow \quad f(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_i x_i$ und

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = 2a_{kk}\, x_k + \sum_{l\neq k} (a_{lk}\, x_l + a_{kl}\, x_l) + b_k$$

$$= \sum_{l=1}^n (a_{lk} + a_{kl})\, x_l + b_k$$

$\Rightarrow \quad f'(x) = x^T \cdot (A + A^T) + b.$

Alle $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ sind stetig! ($\Rightarrow \quad f$ ist differenzierbar)