Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Nada Sissouno

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2009/2010
12.11.2009

# 5. Übungsblatt zur „Analysis II“

## Gruppenübung

**Aufgabe G1**

(a) Gegeben sei die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n2^n \cdot (x-2)^n \ .$$

(i) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe.

(ii) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Potenzreihe konvergiert.

(b) Zeigen Sie, daß die folgende Funktionenreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x^n(1-x)) \quad , \ x \in \mathbb{R},$$

auf dem Intervall $[0,1]$ punktweise, aber nicht gleichmäßig konvergiert.

**Lösung:**

(a) (i) Berechnung des Konvergenzradius $R$:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(-1)^n n 2^n|} = \limsup_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\xrightarrow{n\to\infty} 1} \sqrt[n]{2^n} = 1 \cdot 2$$

Wir erhalten $R = \frac{1}{2}$.

(ii) Aus Aufgabenteil (i) folgt, daß die Potenzreihe für $x \in (2-\frac{1}{2}, 2+\frac{1}{2})$ konvergiert.
Untersuchung der Randstelle $x = 1.5$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot 2^n \cdot n \cdot (1.5-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot 2^n \cdot n \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} n$$

existiert nicht.
Randstelle $x = 2.5$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot 2^n \cdot n \cdot (2.5-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot 2^n \cdot n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n$$

existiert nicht.
Fazit: Die Potenzreihe konvergiert nur für $x \in (1.5, 2.5)$.

(b) Für $x < 1$ ist $\sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot (1-x) = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} x^n = (1-x)\cdot\frac{1}{1-x} = 1$ (geometrische Reihe). Für $x = 1$ erhalten wir $\sum_{n=0}^{\infty} 1^n \cdot (1-1) = 0$. Die Reihe konvergiert demnach punktweise gegen die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x < 1, \\ 0 & \text{falls } x = 1. \end{cases}$$

Die Konvergenz kann nicht gleichmäßig sein, da die Grenzfunktion unstetig ist. (vgl. Satz über gleichmäßige Konvergenz stetiger Funktionen.)

**Aufgabe G2**

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine $2\pi$-periodische, über $[-\pi, \pi]$ R-integrierbare Funktion, die überdies gerade ist, d.h. $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Fourierreihe von $f$ eine reine Cosinusreihe ist, d.h. von der Gestalt

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) \qquad \text{mit } a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx, \quad k \geq 0$$

ist.

**Lösung:**

Für alle $k \geq 0$:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos(kx)\,dx + \int_0^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\int_{\pi}^{0} f(-\xi)\cos(-k\xi)(-1)\,d\xi + \int_0^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} f(\xi)\cos(k\xi)\,d\xi + \int_0^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx. \end{aligned}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx = \cdots = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} f(\xi)\sin(k\xi)(-1)\,d\xi + \int_0^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx\right) = 0.$$

**Aufgabe G3**

Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine $2\pi$-periodische Funktion mit $g(x) = |x|$ für $x \in (-\pi, \pi]$. Geben Sie die Fourierreihe von $g$ an, untersuchen Sie sie auf Konvergenz und bestimmen Sie die Grenzfunktion.

Finden Sie mit Hilfe dieses Ergebnisses eine Reihendarstellung für $\frac{\pi^2}{8}$.

**Lösung:**

- $g(x)$ ist eine gerade Funktion $\overset{\text{G2}}{\Rightarrow} b_k = 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$.

weiter mit G2:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(x)\,\cos(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |x|\,\cos(kx)\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\,\cos(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{k}\,x\,\sin(kx) + \frac{1}{k^2}\,\cos(kx)\right]_0^\pi \\ &= \frac{2}{\pi\,k^2}\Big((-1)^k - 1\Big) \qquad\qquad \text{für } k \geq 1. \end{aligned}$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |x|\,dx = \frac{2}{\pi}\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^\pi = \pi.$$

$\Rightarrow \quad a_{2k} = 0$ und $a_{2k-1} = -\dfrac{4}{\pi(2k-1)^2}$ für $k \in \mathbb{N}$.

Für die FR ergibt ich damit

$$g(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{4}{\pi(2k-1)^2}\cos((2k-1)x).$$

- Da $g$ stückweise stetig differenzierbar ist, konvergiert die Fourierreihe punktweise.
- $g(0) = 0 = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\sum_{k\in\mathbb{N}}\dfrac{\cos(0)}{(2k-1)^2} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\pi^2}{8} = \sum_{k\in\mathbb{N}}\dfrac{1}{(2k-1)^2}.$

  ($\frac{\pi^2}{8}$ ist somit die Summe der reziproken Quadrate aller ungeraden natürlichen Zahlen!)

## Hausübung

**Die Hausaufgaben H1und H2 sind als Präsentationsaufgaben geeignet!**

**Aufgabe H1** (1+4+4+2 Punkte)

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine $2\pi$-periodische Funktion mit $f(x) = x^2$ für $x \in (-\pi, \pi]$.

a) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $f$ auf $[-3\pi, 3\pi]$.

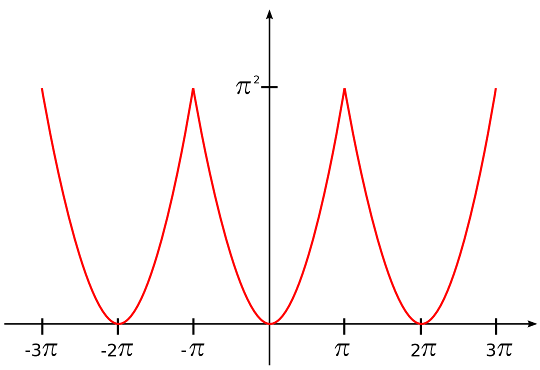
b) Stellen Sie die Fourierreihe von $f$ auf.

c) Welche Funktion stellt die Fourierreihe von $f$ auf $[-\pi, \pi]$ dar?

d) Geben Sie damit je eine Reihendarstellung von $\frac{\pi^2}{12}$ und $\frac{\pi^2}{6}$ an.

**Lösung:**

a)



b) Funktion ist gerade $\Rightarrow \quad b_k = 0 \; \forall k.$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \, dx = \frac{1}{\pi} \left. \frac{x^3}{3} \right|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{3} \pi^2$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(kx) \, dx = \frac{1}{\pi} \left( x^2 \left. \frac{\sin(kx)}{k} \right|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{k} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(kx) \, dx \right) \\ &= -\frac{2}{k\pi} \left( -x \left. \frac{\cos(kx)}{k} \right|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(kx)}{k} \, dx \right) \\ &= -\frac{2}{k^2\pi} \left( -2\pi \cos(k\pi) + \frac{1}{k^2} \sin(kx)|_{-\pi}^{\pi} \right) \\ &= (-1)^k \frac{4}{k^2}. \end{aligned}$$

Die Fourierreihe sieht damit folgendermaßen aus:

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^k \frac{4}{k^2} \cos(kx)$$

c) $\forall x \neq (2k+1)\pi, \; k \in \mathbb{Z}$: die Reihe konvergiert, da $f$ stetig diffbar. ist.

Sei $x = (2k+1)\pi$: $f((2k+1)\pi + 0) = f((2k+1)\pi - 0)$ und es ex. $f'_+((2k+1)\pi), \; f'_-((2k+1)\pi)$.

$$\overset{pkt.weise}{\Rightarrow} \qquad f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_k \frac{4}{k^2} (-1)^k \cos(kx),$$

d)

- $f(0) = 0 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_k \frac{(-1)^k}{k^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi^2}{12} = \sum_k \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}.$
- $f(\pi) = \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_k \frac{(-1)^k(-1)^k}{k^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi^2}{6} = \sum_k \frac{1}{k^2}.$

**Aufgabe H2** (6+3 Punkte)

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die $2\pi$-periodische Funktion mit $f(x) = \frac{(x-\pi)^2}{4}$ für $x \in (0, 2\pi]$.

a) Bestimmen Sie die durch (9.12) definierten Fourierkoeffizienten $a_n$ und $b_n$ von $f$.

b) Zeigen Sie, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$, indem Sie beide Seiten der Parsevalschen Gleichung

$$\frac{(a_0)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n)^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (f(x))^2 \, dx$$

ausrechnen.

**Lösung:** (a) Die Funktion $f$ ist gerade, d.h. $f(x) = f(-x)$ (zeigen!). Somit ist $x \mapsto f(x)\sin(nx)$ eine ungerade Funktion, folglich $b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(x) \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(x) \, dx = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.[1] Weiter ist $a_0 := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(x-\pi)^2}{4} \, dx = \left[ \frac{(x-\pi)^3}{12\pi} \right]_0^{2\pi} = \frac{\pi^2}{6}$ und für $n \in \mathbb{N}$, mittels zweimaliger

[1] Für jede $2\pi$-periodische, über $[0, 2\pi]$ Riemann-integrierbare Funktion $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt $\int_{\pi}^{2\pi} g(x) \, dx = \int_{-\pi}^{0} g(x + 2\pi) \, dx = \int_{-\pi}^{0} g(x) \, dx$ und somit $\int_0^{2\pi} g(x) \, dx = \int_0^{\pi} g(x) \, dx + \int_{\pi}^{2\pi} g(x) \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \, dx$.

partieller Integration:

$$\begin{aligned}\pi \cdot a_n &= \int_0^{2\pi} \frac{(x-\pi)^2}{4} \cos(nx)\,dx \\ &= \underbrace{\left[\frac{(x-\pi)^2 \sin(nx)}{4n}\right]_0^{2\pi}}_{=0} - \int_0^{2\pi} \frac{(x-\pi)\sin(nx)}{2n}\,dx \\ &= \left[\frac{(x-\pi)\cos(nx)}{2n^2}\right]_0^{2\pi} - \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{\cos(nx)}{2\,n^2}\,dx}_{=0} = \frac{\pi}{n^2}\,,\end{aligned}$$

also $a_n = \frac{1}{n^2}$.

(b) Setzen wir die oben berechneten Fourierkoeffizienten in die linke Seite der Parsevalschen Gleichung ein, erhalten wir $\frac{\pi^4}{72} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$. Die rechte Seite berechnen sich zu $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(x-\pi)^4}{16}\,dx = \left[\frac{(x-\pi)^5}{80\pi}\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi^4}{40}$. Also ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \pi^4\left(\frac{1}{40} - \frac{1}{72}\right) = \frac{\pi^4}{90}$