Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Nada Sissouno

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2009/2010
5.11.2009

4. Übungsblatt zur „Analysis II“

Gruppenübung

Aufgabe G1

Betrachten Sie die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ und

$$f_n(x) \quad := \quad \begin{cases} n^2 - \frac{n^3}{2}x & \text{für } x \in (0, \frac{2}{n}], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

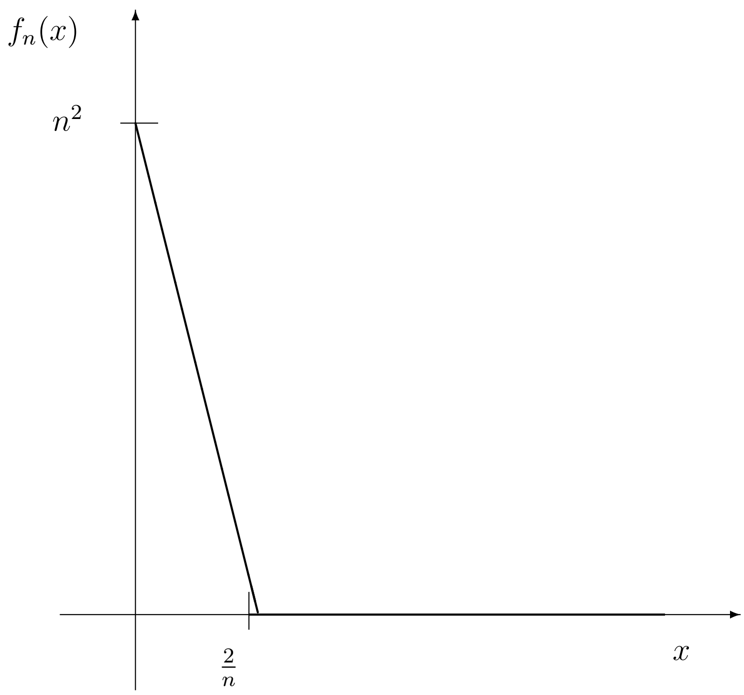
a) Skizzieren Sie f_n für ein allgemeines n.

b) Überprüfen Sie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz und bestimmen Sie die Grenzfunktion f.

c) Bestimmen Sie $\int_0^\infty f(x)dx$ sowie $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)dx$. Nemmen Sie Stellung zu Ihren Ergebnissen.

Lösung:

a) Skizze:



b) Die Folge konvergiert punktweise gegen die konstante Funktion $f \equiv 0$ wegen $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$. Aber, wegen $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = \lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$ konvergiert die Folge nicht gleichmäßig.

c) Es gilt $\int_0^\infty f_n(x)dx = n$ und $\int_0^\infty f(x)dx = 0$. Also folgt $\lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \infty$, und der entsprechende Grenzwert existiert nicht, obwohl das Integral des Grenzwertes dennoch existiert. Satz 9.12 ist also nicht anwendbar bei fehlender gleichmäßiger Konvergenz.

Aufgabe G2

Auf der Menge $C^1[0,1]$ der stetig differenzierbaren Funktionen von $[0,1]$ nach $\mathbb{R}$ definieren wir eine Funktion $\|\bullet\|$ durch

$$\|f\| := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

(a) Zeigen Sie, daß $C^1[0,1]$ ein Untervektorraum des Raumes der stetigen Funktionen $C[0,1]$ ist. Zeigen Sie weiter, daß $\|\bullet\|$ eine Norm auf $C^1[0,1]$ ist.

(b) Zeigen Sie, daß $(C^1[0,1], \|\bullet\|)$ ein Banach-Raum ist.

Lösung:

(a) Summen sowie skalare Vielfache stetig differenzierbarer Funktionen sind stetig differenzierbar: somit ist $C^1[0,1]$ ein Untervektorraum von $C[0,1]$. Da $(rf)' = r\,f'$, berechnen wir für $f \in C^1[0,1]$ und $r \in \mathbb{R}$:

$$\|rf\| = \|rf\|_\infty + \|r\,f'\|_\infty = |r| \cdot \|f\|_\infty + |r| \cdot \|f'\| = |r| \cdot (\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty) = |r| \cdot \|f\|,$$

wobei wir ausgenutzt haben, daß $\|.\|_\infty$ eine Norm auf $C[0,1]$ ist. Für $f, g \in C^1[0,1]$ gilt wegen $(f+g)' = f' + g'$ weiter

$$\|f+g\| = \|f+g\|_\infty + \|f' + g'\|_\infty \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty + \|f'\|_\infty + \|g'\|_\infty = \|f\| + \|g\|.$$

Schließlich folgt aus $0 = \|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$, daß $\|f\|_\infty = 0$ und somit $f = 0$. Wir haben gezeigt, daß $\|.\|$ eine Norm ist.

(b) Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Fundamentalfolge in $C^1[0,1]$, so gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\|f_n - f_m\| < \varepsilon \quad \text{für alle } n, m \ge n_0. \tag{1}$$

Dann gilt auch $\|f_n - f_m\|_\infty \le \|f_n - f_m\| < \varepsilon$ und $\|f_n' - f_m'\|_\infty \le \|f_n - f_m\| < \varepsilon$. Also sind $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ Fundamentalfolgen im Banach-Raum $(C[0,1], \|.\|_\infty)$, daher gleichmäßig konvergent gegen gewisse stetige Funktionen f bzw. g. Nach Satz 9.13 ist f stetig differenzierbar, mit $f' = g$. Ist n_0 zu $\varepsilon > 0$ wie zuvor gewählt, so gilt wegen (1) für alle $m, n \ge n_0$:

$$\|f_n - f_m\|_\infty + \|f_n' - f_m'\|_\infty < \varepsilon.$$

Grenzübergang $m \to \infty$ in dieser Ungleichung liefert $\|f_n - f\| = \|f_n - f\|_\infty + \|f_n' - f'\|_\infty \le \varepsilon$, für alle $n \ge n_0$. Somit $f_n \to f$ in $C^1[0,1]$. Weil nach dem Vorigen jede Fundamentalfolge in $C^1[0,1]$ konvergiert, ist $C^1[0,1]$ ein Banach-Raum.

Aufgabe G3

Wir betrachten die Funktionenreihe $\sum_{n=0}^\infty f_n$, wobei

$$f_n \colon [0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) := \frac{1}{(2+x)^n}.$$

(a) Untersuchen Sie die Reihe auf punktweise Konvergenz, und bestimmen Sie gegebenenfalls die Grenzfunktion.

(b) Konvergiert die Reihe absolut ?

Lösung: (a) Für festes $x \geq 0$ ist $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2+x)^n}$ eine geometrische Reihe (mit $q = \frac{1}{2+x}$), folglich konvergent gegen $f(x) := \frac{1}{1-\frac{1}{2+x}} = \frac{2+x}{1+x}$.

(b) Für festes $n \in \mathbb{N}$ berechnen wir $\|f_n\|_\infty = \sup\{\frac{1}{(2+x)^n} : x \geq 0\} = \frac{1}{2^n}$, da $x \mapsto \frac{1}{(2+x)^n}$ monoton fallend ist. Da $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^n$ eine geometrische Reihe und daher konvergent ist, konvergiert die Funktionenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2+x)^n}$ absolut.

Hausübung

Die Hausaufgaben H1 und H2 sind als Präsentationsaufgaben geeignet!

Aufgabe H1

Gegeben sei die Funktionenfolge

$$f_n(x) = \frac{2x}{n} \mathrm{e}^{\frac{x^2}{n}}, \quad x \in [0,1].$$

(a) Untersuchen Sie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

(b) Bestimmen Sie

$$I_1 = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad I_2 = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

und vergleichen Sie die Ergebnisse. Gibt es dafür eine theoretische Erklärung?

Lösung:

(a) (f_n) konvergiert auf $[0,1]$ gleichmäßig gegen die Nullfunktion, denn

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = \sup_{x\in[0,1]} \left| \frac{2x}{n} e^{\frac{x^2}{n}} \right| \leq \sup_{x\in[0,1]} \frac{2\cdot 1}{n} e^{\frac{1}{n}} = \frac{2\sqrt[n]{e}}{n}.$$

Es gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2\sqrt[n]{e}}{n} = 0$ und damit konvergiert die Funktionenfolge insbesondere auch punktweise.

(b)

$$\begin{aligned} I_1 &= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{2x}{n} e^{\frac{x^2}{n}}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{x^2}{n}}\Big|_0^1 \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(e^{\frac{1}{n}} - e^0\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{e} - 1\right) = 0 \\ I_2 &= \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 0 \quad \mathrm{d}x = 0. \end{aligned}$$

Also gilt $I_1 = I_2$, was wegen (a) auch sofort aus Satz 9.12 folgt.

Aufgabe H2

Zeigen Sie, daß die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ mit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{x+n}$ gleichmäßig konvergiert, jedoch nicht absolut.

[Hinweis: Betrachten Sie zunächst die Teilsummen $\sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^{n+1}}{x+n}$ über eine gerade Anzahl von Summanden].

Lösung:
Für $x \in [0,1]$ berechnen wir

$$S_{2N}(x) := \sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^{n+1}}{x+n} = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{x+2n-1} - \frac{1}{x+2n} \right) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(x+2n-1)\cdot(x+2n)},$$

wobei $\frac{1}{(x+2n-1)\cdot(x+2n)} \leq \frac{1}{2\cdot n^2}$. Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\cdot n^2}$ konvergiert, finden wir zu gegebenem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, daß $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{2\cdot n^2} < \frac{\varepsilon}{2}$. Für alle k, m mit $m \geq k \geq n_0$ gilt folglich

$$0 \leq S_{2m}(x) - S_{2k}(x) = \sum_{n=k+1}^{m} \frac{1}{(x+2n-1)\cdot(x+2n)} \leq \sum_{n=k+1}^{m} \frac{1}{2\cdot n^2} < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (1)$$

Nach dem Cauchy-Kriterium konvergiert die Folge $(S_{2N}(x))_{N\in\mathbb{N}}$, gegen $f(x)$ etwa. Grenzübergang $m \to \infty$ in Ungleichung (1) zeigt, daß $0 \leq f(x) - S_{2k}(x) = |f(x) - S_{2k}(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $k \geq n_0$ und alle $x \in [0,1]$. Nun gilt $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n} \to 0$ für $n \to \infty$, wir finden also ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $\|f_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_1$. Dann gilt $\|f - S_N\|_\infty < \varepsilon$ für alle $x \in [0,1]$ und alle $N \geq \max\{2\cdot n_0, n_1\}$: In der Tat wissen wir dies bereits für gerades N. Ist N jedoch ungerade, so können wir $\|f - S_N\|_\infty \leq \|f - S_{N+1}\|_\infty + \|f_{N+1}\|_\infty < \varepsilon$ abschätzen, wobei $S_{N+1} = S_N + f_{N+1}$ benutzt wurde. Folglich $\|f - S_N\|_\infty \to 0$ für $N \to \infty$, weswegen die Partialsummen S_N gleichmäßig gegen f konvergieren.

Für die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty$ gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Dies ist die harmonische Reihe, welche divergent ist. Somit ist aber $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ nicht absolut konvergent.

Aufgabe H3

Der folgende Satz ist als *Satz von Dini* bekannt:
Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine punktweise konvergente Funktionenfolge stetiger Funktionen mit Definitionsbereich D, die punktweise gegen eine Grenzfunktion f konvergiert. Wir nehmen zusätzlich an:

(a) Der Definitionsbereich D ist kompakt.

(b) Die Grenzfunktion f ist stetig.

(c) Die Konvergenz ist monoton, das heißt $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ für alle $x \in D$ und alle $n \in \mathbb{N}$ oder $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ für alle $x \in D$ und alle $n \in \mathbb{N}$.

Dann konvergiert die Funktionenfolge sogar gleichmäßig gegen f.

i) Zeigen Sie, dass jede einzelne der Annahmen (a), (b) und (c) nötig ist, finden Sie also Beispiele für punktweise konvergente Funktionenfolgen, die nur eine der Bedingungen (a), (b) oder (c) verletzen und die trotzdem nicht gleichmäßig konvergieren.

ii) Seien $f_n\colon [a,b] \to [0,\infty)$, $n \in \mathbb{N}$, stetig und nehmen wir an, dass $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ punktweise konvergiert mit stetiger Grenzfunktion f. Zeigen Sie: Die Reihe konvergiert gleichmäßig.

Lösung:

i) Mit $f_n(x) := e^{x-n}$, $D = \mathbb{R}$ ist (b) und (c) erfüllt, aber nicht (a).
Mit $f_n(x) = x^n$, $D = [0,1]$ ist (a) und (c) erfüllt, aber nicht (b).

Sei

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1-(x-1)^2 & x \in [1,2] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Mit $f_n(x) := \Phi(nx)$, $D = [0,1]$ ist (a) und (b), aber nicht (c).

Alle diese Folgen konvergieren nur punktweise, aber nicht gleichmäßig.

ii) Dies ist eine direkte Anwendung des Satzes von Dini auf die Folge der Partialsummen $F_n := \sum_{k=1}^{n} f_k$.