Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Nada Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/2010
29.10.2009

# 3. Übungsblatt zur „Analysis II“

## Gruppenübung

**Majorantenkriterium für uneigentliche Riemann-Integrale:**
Es seien $f : [\,0,\infty\,) \to [\,0,\infty\,)$ und $g : [\,0,\infty\,) \to [\,0,\infty\,)$ Funktionen, welche über $[\,0,b\,]$ Riemann-integrierbar sind, für alle $0 < b$. Gilt $f(x) \leq g(x)$ für alle genügend große $x$ und konvergiert das uneigentliche Riemann-Integral $\int_0^\infty g(x)\,dx$, so konvergiert auch $\int_0^\infty f(x)\,dx$.

**Aufgabe G1**
Konvergiert das uneigentliche Integral? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

*a)* $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{x^3+1}\,dx$

*b)* $\displaystyle\int_0^\infty \frac{|\sin(x)|}{x}\,dx$

*c)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,dx$

*d)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx$

*e)* $\displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{x\cdot(\ln(x))^\alpha}\,dx$ für $\alpha \in \mathbb{R}$.

**Lösung:**
a) Wir brauchen nur die Konvergenz von $\int_1^\infty \frac{x}{x^3+1}\,dx$ zu zeigen, da die stetige Funktion $x \mapsto \frac{x}{x^3+1}$ über dem Intervall $[0,1]$ Riemann-integrierbar ist. Es gilt $\frac{x}{x^3+1} \leq \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2}$ für alle $x \geq 1$, wobei das uneigentliche Riemann-Integral $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ konvergiert (§8.10.1, Beispiel 1). Nach dem Majorantenkriterium (das natürlich etwas allgemeiner als angegeben gültig bleibt, wenn die Integration an einer anderen Stelle als 0 beginnt) konvergiert also auch $\int_1^\infty \frac{x}{x^3+1}\,dx$.

b) Es gilt $\int_{k\cdot\pi}^{(k+1)\cdot\pi} \frac{|\sin(x)|}{x}\,dx \geq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{(k+1)\,\pi}\,dx = \frac{1}{(k+1)\,\pi}\int_0^\pi \sin x\,dx = \frac{2}{(k+1)\,\pi}$ für $k \in \mathbb{N}$ und daher

$$\int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{(k+1)\,\pi} \to \infty$$

für $\mathbb{N} \ni n \to \infty$. Das uneigentliche Riemann-Integral $\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,dx$ konvergiert also nicht.

c) Zu gegebenem $0 < \varepsilon < 1$ erhalten wir vermöge der partiellen Integration $u(x) = \ln(x)$, $v'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $u'(x) = \frac{1}{x}$, $v(x) = 2 \cdot \sqrt{x}$:

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx &= \left[2\ln(x)\sqrt{x}\right]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \frac{2}{\sqrt{x}}\, dx \\ &= -2\ln(\varepsilon)\sqrt{\varepsilon} - \left[4\sqrt{x}\right]_\varepsilon^1 \\ &= -2\ln(\varepsilon)\sqrt{\varepsilon} - 4 + 4\sqrt{\varepsilon} \to -4 \quad \text{für } \varepsilon \to 0\,, \end{aligned}$$

weil $\lim_{\varepsilon\to 0} \ln(\varepsilon)\sqrt{\varepsilon} = \lim_{x\to\infty} \ln(e^{-x})\sqrt{e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{e^{x/2}} = 0$.

d) Zu gegebenen $0 < \varepsilon < 1$ erhalten wir

$$\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \left[-\frac{2}{\sqrt{x}}\right]_\varepsilon^1 = -2 + \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Wenn $\varepsilon \to 0$, so strebt $[-2 + \dfrac{2}{\sqrt{\varepsilon}}] \to \infty$. Somit konvergiert $\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x}}\, dx$ nicht.

e) Die Substitution $y = \ln x$ liefert für $r > e$:

$$\int_e^r \frac{dx}{x(\ln x)^\alpha} = \int_{\ln e}^{\ln r} \frac{dy}{y^\alpha}.$$

Hier $\ln r \to \infty$ für $r \to \infty$. Wegen §8.10.1 Beispiel 1 konvergieren die Integrale auf der rechten Seite für $r \to \infty$ falls $\alpha > 1$, während sie für $\alpha \leq 1$ bestimmt gegen $\infty$ divergieren. Die zu untersuchenden uneigentlichen Riemann-Integrale konvergieren also genau für $\alpha > 1$.

**Aufgabe G2**

Wir betrachten die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der durch

$$f_n(x) := \begin{cases} n^2 \cdot x & \text{falls } \; x \leq \frac{1}{n} \\ n - n^2 \cdot (x - \frac{1}{n}) & \text{falls } \; \frac{1}{n} < x \leq \frac{2}{n} \\ 0 & \text{falls } \; x > \frac{2}{n} \end{cases}$$

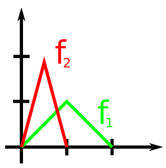
definierten “Zackenfunktionen” $f_n \colon [0, 2] \to \mathbb{R}$.

(a) Skizzieren Sie $f_1$ und $f_2$.

(b) Zeigen Sie, daß die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $n \to \infty$ punktweise konvergiert. Bestimmen Sie die durch $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ definierte Grenzfunktion $f$. Ist die Konvergenz gleichmäßig?

**Lösung:**

(a)




(b) Da $f_n(0) = 0$ für alle $n$, gilt $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$. Für $x \in ]0, 2]$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{2}{N} < x$. Dann gilt $\frac{2}{n} < x$ für alle $n \geq N$ und somit $f_n(x) = 0$ per Definition von $f_n$. Also $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Wir haben gezeigt, daß die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen die Nullfunktion $f \colon [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ konvergiert. Für jedes $n_0 \in \mathbb{N}$ ist $f_{n_0}(\frac{1}{n_0}) = n_0 \geq 1$; wir finden also kein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, daß $|f_n(x) - 0| < 1$ für alle $n \geq n_0$ und alle $x \in [0, 2]$. Daher liegt keine gleichmäßige Konvergenz vor.

**Aufgabe G3**

Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Polynomfunktionen konvergiere auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig gegen eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß auch $f$ eine Polynomfunktion ist.

**Lösung:**

Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz finden wir ein $N \in \mathbb{N}$ derart, daß $|f(x) - f_n(x)| \leq 1$ für alle $n \geq N$ und $x \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$|f_n(x) - f_N(x)| \leq 2$$

für alle $n \geq N$ und $x \in \mathbb{R}$. Es ist also $p_n := f_n - f_N$ eine beschränkte Polynomfunktion für $n \geq N$ und somit vom Grade 0 oder das Nullpolynom; mit anderen Worten, es ist $p_n(x) = p_n(0)$ für alle $x$. Also

$$f(x) - f_N(x) = \lim_{n\to\infty} p_n(x) = \lim_{n\to\infty} p_n(0) = f(0) - f_N(0)\,.$$

Folglich ist $f = f_N + f(0) - f_N(0)$, mithin $f$ eine Polynomfunktion.

# Hausübung

**Die Hausaufgaben H1b), H2 und H3 sind als Präsentationsaufgaben geeignet!**

**Aufgabe H1** (9 Punkte)

Durch

$$x = a \cdot \cos^3(t), \quad y = a \cdot \sin^3(t) \qquad \text{mit } a > 0,\ 0 \leq t \leq 2\pi$$

wird eine Astroide in Parameterdarstellung gegeben.

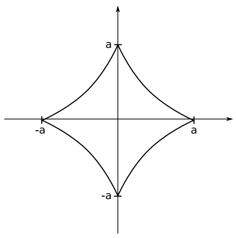
a) Machen Sie eine Skizze.

b) Leiten Sie mit Hilfe von partieller Integration eine Rekursionsformel für $V_n = \int \sin^n(x)\,dx$ her.

c) Berechnen Sie den Inhalt der durch die Astroide begrenzten Fläche.

**Lösung:**

(a)




(b)

$$\begin{aligned}
V_n &= \int \sin^n(x)\,dx = \int \sin^{n-1}(x)\sin(x)\,dx \\
&\overset{\text{p.I.}}{=} -\sin^{n-1}(x)\cos(x) + (n-1)\int \sin^{n-2}(x)\cos^2(x)\,dx \\
&= -\sin^{n-1}(x)\cos(x) + (n-1)\int \sin^{n-2}(x)\,dx - (n-1)\int \sin^n(x)\,dx
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad V_n = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}(x)\,\cos(x) + \frac{n-1}{n}V_{n-2}.$$

(c) Die Astroide ist symmetrisch bzgl. der $x$-Achse und der $y$-Achse. (Denn ang. $t = t_0$ entspricht dem Punkt $(x_0, y_0)$, dann entspricht $t = -t_0$ dem Punkt $(x_0, -y_0)$ und $t = \pi - t_0$ entspricht

$(-x_0, y_0)$.) - hier ist auch möglich über eine !!gute!! Skizze zu argumentieren.

Für $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$ erhalten wir den Teil im ersten Quadranten des Koordinatensystems. Die Fläche dieses Teils sei $F_1$. Für die gesamte Fläche gilt: $F = 4 \cdot F_1$.

$$
\begin{aligned}
F_1 &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} |a\sin^3(t)| \cdot \big(-3a\cos^2(t)\,\sin(t)\big)\;dt = 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\sin^4(t)\,dt \\
&= 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(1-\sin^2(t)\big)\sin^4(t)\,dt = 3a^2\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(t)\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6(t)\,dt\right] = \ldots\ \textit{Teil (b)} \cdots = \\
&= 3a^2\left[-\frac{1}{24}\sin^3(t)\cos(t) + \frac{1}{6}\sin^5(t)\cos(t) - \frac{1}{16}\cos(t)\sin(t) + \frac{1}{16}\,t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{32}\pi a^2
\end{aligned}
$$

Somit folgt: $F = \dfrac{3}{8}\,\pi\, a^2$.

**Aufgabe H2** (6 Punkte)

Die gegebenen Folgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ konvergieren punktweise. Berechnen Sie die Grenzfunktion $f$ und entscheiden Sie, ob die Folge $f_n$ gleichmäßig gegen $f$ konvergiert.

(a) $f_n(x) := \dfrac{x}{1+nx}$,

(b) $f_n(x) := \dfrac{1}{1+nx}$,

(c) $f_n(x) := \dfrac{nx}{1+n^2x}$.

**Lösung:**

a) Es ist $f_n(0) = 0$ für alle $n$ und somit $f(0) = \lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$. Für $x > 0$ gilt $0 \le \frac{x}{1+nx} \le \frac{x}{nx} = \frac{1}{n}$, unabhängig von $x$. Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so finden wir $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Für alle $n \ge n_0$ und alle $x \in [0,\infty[$ gilt dann $|\frac{x}{1+nx} - 0| \le \frac{1}{n} \le \frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Wir haben gezeigt, daß $\frac{x}{1+nx} \to 0$ gleichmäßig.

b) Es gilt $f_n(0) = 1$ für alle $n$, somit $f(0) := \lim_{n\to\infty} f_n(0) = 1$. Für $x > 0$ hingegen habe wir $f(x) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+nx} = 0$. Es gibt zwei Argumentationsmöglichkeiten:

1.) Für jedes $n_0 \in \mathbb{N}$ ist $f_{n_0}(\frac{1}{n_0}) = \frac{1}{2}$. Somit finden wir kein $n_0$: $|f_n(x) - 0| < \frac{1}{2}$ für alle $n \ge n_0$ und alle $x \in [0,\infty)$. Es liegt also keine gleichmäßige Konvergenz vor.

2.) Da die Grenzfunktion $f$ der punktweise konvergenten Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht stetig ist, kann die Konvergenz nicht gleichmäßig sein (Satz 9.9).

c) Wie zuvor schließen wir $f(0) := \lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$, für $x > 0$ weiter $f(x) := \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2\,x}$ $= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{nx}+n} = 0$. Für festes $n$ ist $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x} = \frac{n}{\frac{1}{x}+n^2}$ für $x > 0$, mithin $f_n$ eine monoton wachsende Funktion mit $f_n(0) = 0$. Wir schließen, daß

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| = f_n(x) \le \lim_{y\to\infty} f_n(y) = \tfrac{1}{n}\,,$$

unabhängig von $x \in [0,\infty)$. Folglich $f_n \to 0$ gleichmäßig.

**Aufgabe H3** (4 Punkte)

Beweisen Sie das Majorantenkriterium für uneigentliche Integrale.

**Lösung:**
Da $f$ nicht-negativ ist, ist $F : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $F(r) := \int_0^r f(x)\,dx$ eine monoton wachsende Funktion. Diese ist nach oben beschränkt: Per Voraussetzung gibt es nämlich ein $r_0 \in [0,\infty)$ mit $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \geq r_0$; wir erhalten

$$\begin{aligned} F(r) &= \int_0^{r_0} f(x)\,dx + \int_{r_0}^{r} f(x)\,dx \\ &\leq \int_0^{r_0} f(x)\,dx + \int_{r_0}^{r} g(x)\,dx \\ &\leq \int_0^{r_0} f(x)\,dx + \int_0^{\infty} g(x)\,dx \end{aligned}$$

für alle $r > r_0$. Also ist $F$ monoton wachsend und beschränkt. Folglich strebt $F(x)$ für $x \to \infty$ gegen $\sup\{F(x) \colon x \in [0,\infty)\}$ (klar ?)