Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Nada Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/2010
22.10.2009

2. Übungsblatt zur „Analysis II“

Gruppenübung

Aufgabe G1

Wir betrachten zwei Funktionen $F, G : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, die durch

$$F(x) = -\arctan(x), \qquad G(x) = \arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

definiert sind.

a) Zeigen Sie, dass F und G Stammfunktionen derselben Funktion f sind und bestimmen Sie f.

b) Welche Form haben alle Stammfunktionen von f?

c) Bestimmen Sie eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in (-1, \infty)$ die Gleichung $G(x) = F(x) + c$ gilt.

Lösung:

a)

- $F'(x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$
- $G'(x) = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^2} \cdot \left(-\dfrac{2}{(1+x)^2}\right) = \dfrac{-2}{2+2x^2} = -\dfrac{1}{1+x^2} = F'(x).$

Damit ist $f(x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

b) Stammfkt. von f: $F(x) = -\arctan(x) + c$.

c) $F(0) = 0$ und $G(0) = \dfrac{\pi}{4}$. Somit gilt $G(x) = F(x) + \frac{\pi}{4}$.

Aufgabe G2

Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{6x^2+4}{x^3+2x+1}\,dx,$ d) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}\,,$

b) $\displaystyle\int_0^\pi e^{\sin x}\cos x\,dx,$ e) $\displaystyle\int x^2\sin(x)\,dx,$

c) $\displaystyle\int_{-1}^1 \cos^2(x)dx,$ f) $\displaystyle\int x\,e^x\,dx.$

Lösung:

a) Substitutionsregel:

$$\int_0^1 \frac{6x^2+4}{x^3+2x+1}dx = 2\cdot\int_0^1 \frac{(x^3+2x+1)'}{x^3+2x+1}dx = 2\cdot\int_1^4 \frac{1}{t}dt = 2\cdot[\ln(t)]_1^4 = 2\ln(4).$$

b) Substitutionsregel:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi e^{\sin x}\cos x\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}\cos x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi e^{\sin x}\cos x\,dx\\ &= \int_0^1 e^t\,dt + \int_1^0 e^t\,dt = \int_0^1 e^t\,dt - \int_0^1 e^t\,dt = 0\end{aligned}$$

c) Partielle Integration:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \cos^2(x)\,dx = \int_{-1}^1 \cos(x)\cos(x)\,dx &= \sin(x)\cos(x)]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 \sin^2(x)\,dx\\ &= [\sin(x)\cos(x)]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 1dx - \int_{-1}^1 \cos^2(x)\,dx.\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\int_{-1}^1 \cos^2(x)\,dx = \frac{1}{2}\left([\sin(x)\cos(x)]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 1dx\right) = \sin(1)\cos(1)+1.$$

d) Substitutionsregel: Mit $t = x+\sqrt{x^2+1}$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{\frac{t^2+1}{2\,t^2}}{\frac{t^2+1}{2\,t}}\,dt = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t| + c.$$

Daraus folgt

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln|x+\sqrt{x^2+1}| + c.$$

e) Partielle Integration:

$$\begin{aligned}\int x^2\sin(x)\,dx &= -x^2\cos(x) + \int 2x\cos(x)\,dx\\ &= -x^2\cos(x) + 2x\sin(x) - 2\int \sin(x)\,dx\\ &= 2x\sin(x) - (x^2-2)\cos(x) + c.\end{aligned}$$

f) Partielle Integration:

$$\int x\, e^x\, dx = x \cdot e^x - \int e^x\, dx = x \cdot e^x - e^x + c.$$

Aufgabe G3

Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegungen folgender Funktionen.

a) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x-6}$,

b) $g(x) = \dfrac{x}{(x+1)^3}$.

Lösung:

a) Nullstellen von $x^2 + x - 6$ sind $2, -3$. Damit ergibt sich der Ansatz:

$$\frac{2x+1}{x^2+x-6} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-2}\,.$$

Zu lösendes LGS:

$$\begin{aligned} A + B &= 2 \\ -2A + 3B &= 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow A = B = 1$ und somit

$$f(x) = \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x-2}\,.$$

b) Ansatz:

$$\frac{x}{(x+1)^3} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3}\,.$$

Zu lösendes LGS:

$$\begin{aligned} A &= 0 \\ 2A + B &= 1 \\ A + B + C &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow A = 0$, $B = 1$, $C = -1$ und somit

$$g(x) = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^3}\,.$$

Hausübung

Die Hausaufgaben H1, H2b) und H2c) sind als Präsentationsaufgaben geeignet!

Aufgabe H1

Berechnen Sie die Integrale

$$I_1 := \int \sqrt{x^2+1}\, dx \qquad \text{und} \qquad I_2 := \int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{x^2+1}}\,.$$

Hinweis: Leiten Sie 2 Beziehungen zwischen I_1 und I_2 her, indem Sie

(a) den Integranten von I_1 mit $\sqrt{x^2+1}$ erweitern und dann bei der Integration Aufgabe G2 nutzen.

(b) I_1 zusätzlich partiell integrieren.

Lösung: (a) I_1 wird mit $\sqrt{x^2+1}$ erweitert:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+1}} + \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} \\ &= I_2 + \ln|x+\sqrt{x^2+1}|. \end{aligned}$$

(b) I_1 partiell integrieren:

$$I_1 = x\cdot\sqrt{x^2+1} - \int x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\,dx = x\cdot\sqrt{x^2+1} - I_2.$$

(a)+(b): $I_1 = \frac{1}{2}\left(x\cdot\sqrt{x^2+1} + \ln|x+\sqrt{x^2+1}|\right).$

(a)-(b): $I_2 = \frac{1}{2}\left(x\cdot\sqrt{x^2+1} - \ln|x+\sqrt{x^2+1}|\right).$

Aufgabe H2

Bestimmen Sie die folgenden Integrale.

a) $\displaystyle\int \log_p(x)\,dx$ für $p>1$.

b) $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2(x)}\,dx,$

c) $\displaystyle\int \frac{2+\sin(x)}{\sin(x)\,(1+\cos(x))}\,dx.$

HINWEIS: Nutzen Sie die Substitution $t=\tan(\frac{x}{2})$.

Lösung:

a)

$$p^{\log_p(x)} = x \;\rightarrow\; \ln(p^{\log_p(x)}) = \ln(x) \;\rightarrow\; \log_p(x) = \frac{1}{\ln(p)}\ln(x).$$

Damit gilt:

$$\int \log_p(x)\,dx = \int \frac{\ln(x)}{\ln(p)}\,dx = \frac{1}{\ln(p)}\cdot x(\ln(x)-1)+c.$$

b) partielle Integration:

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\cos^2(x)}\,dx &= x\cdot\tan(x) - \int \tan(x)\,dx = x\cdot\tan(x) - \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx \\ &= x\cdot\tan(x) + \int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\,dx \\ &= x\cdot\tan(x) + \ln|\cos(x)| + c. \end{aligned}$$

Dabei wird verwendet, dass mit $x=\arctan(t)$:

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx = \int 1+\tan^2(x)\,dx = \int 1\,dt = t = \tan(x).$$

c) Mit der Substitution $x = 2\arctan(t)$ gilt:

$$\begin{aligned}\int \frac{2+\sin(x)}{\sin(x)\,(1+\cos(x))}\,dx &= \int \frac{2+\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\cdot\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt\\ &= \int \frac{1+t+t^2}{t}\,dt = \ln|t| + \frac{1}{2}\,t^2 + t + c\\ &= \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + \frac{1}{2}\,\tan^2\left(\frac{x}{2}\right) + \tan\left(\frac{x}{2}\right) + c\end{aligned}$$

Aufgabe H3

Bestimmen Sie die folgenden Integrale mittels Partialbruchzerlegung.

a) $\displaystyle\int \frac{x^6+x^4+x}{x^4-1}\,dx,$

b) $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2+x}{x^4+2x^2+1}\,dx.$

Lösung:

a) Polynomdivision: $\dfrac{x^6+x^4+1}{x^4-1} = x^2+1+\dfrac{x^2+x+1}{x^4-1}.$

Nenner: $x^4-1 = (x^2+1)(x^2-1) = (x^2+1)(x+1)(x-1).$

Ansatz: $\dfrac{x^2+x+1}{x^4-1} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{C+Dx}{x^2+1}.$

$$\begin{aligned} A+B+D &= 0\\ -A+B+C &= 1\\ A+B-D &= 1\\ -A+B-C &= 1\end{aligned}$$

$\Rightarrow A = -\dfrac{1}{4},\ B = \dfrac{3}{4},\ C = 0,\ D = -\dfrac{1}{2}.$

$$\begin{aligned}\int \frac{x^6+x^4+1}{x^4-1} &= \int x^2+1\,dx - \frac{1}{4}\int\frac{1}{x+1}\,dx + \frac{3}{4}\int\frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{2}\int\frac{x}{x^2+1}\,dx\\ &= \frac{1}{3}x^3 + x - \frac{1}{4}\ln|x+1| + \frac{3}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + c.\end{aligned}$$

b) Nenner: $x^4+2x^2+1 = (x^2+1)^2.$

Ansatz: $\dfrac{x^3+x^2+x}{x^4+2x^2+1} = \dfrac{A+Bx}{x^2+1} + \dfrac{C+Dx}{(x^2+1)^2}.$

$\Rightarrow A = 1,\ B = 1,\ C = -1,\ D = 0.$

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3+x^2+x}{x^4+2x^2+1}\,dx &= \int\frac{1+x}{x^2+1}\,dx - \int\frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx\\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \int\frac{1}{x^2+1}\,dx - \int\frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx\\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \int\frac{1}{x^2+1}\,dx - \int\frac{1}{x^2+1}\,dx + \int\frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx\\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan(x) + c.\end{aligned}$$