Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Nada Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/2010
16.10.2009

1. Übungsblatt zur „Analysis II“

Gruppenübung

Aufgabe G1

Bestimmen Sie für jede der folgenden Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ das untere und obere Integral und entscheiden Sie, ob die Funktion Riemann-integrierbar ist. Falls dies der Fall ist, so bestimmen Sie $\int_0^1 f(x)dx$.

a) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = \frac{1}{2} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x = 0 \\ 2 & \text{für } x = 1 \\ x & \text{sonst} \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = \frac{1}{n} \quad (n \geq 1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q};\ p, q \ - \text{ teilerfremd} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

Lösung: Die Funktionen sind alle beschränkt, daher läßt sich Satz 8.8 anwenden.

a) Wir wählen als Zerlegung $Z_n = \{x_0 = 0, \ldots, x_k = \frac{k}{n}, \ldots, x_n = 1\}$. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\int_{*0}^{1} f(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty} (U(Z_n, f)) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \inf_{x\in I_k} (f(x))\, \Delta x_k \right) \\
&= \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sum\limits_{k=0}^{\frac{n-1}{2}-1} 1\cdot\frac{1}{n} + 0 + \sum\limits_{k=\frac{n+1}{2}}^{n-1} 1\cdot\frac{1}{n} \right) & n \text{ ungerade} \\ \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sum\limits_{k=0}^{\frac{n}{2}-2} 1\cdot\frac{1}{n} + 0 + \sum\limits_{k=\frac{n}{2}+1}^{n-1} 1\cdot\frac{1}{n} \right) & n \text{ gerade} \end{cases} \\
&= \cdots = 1.
\end{aligned}$$

$$\int_0^{1^*} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} O(Z_n, f) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \sup_{x\in I_k} (f(x)) \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} 1 \cdot \frac{1}{n} = 1.$$

Nach Satz 8.7 ist somit f Darboux-int., damit auch Riemann-int. und es gilt

$$\int_0^{1^*} f(x)\,dx = \int_{*0}^1 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx = 1.$$

b) Mit der selben Zerlegung wie bei a) gilt:

$$\int_{*0}^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\frac{(n-1)n}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

$$\int_0^{1^*} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n} + \sum_{k=0}^{n-2}\frac{k+1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}k\right) = \frac{1}{2}.$$

Mit Satz 8.7 gilt wieder, dass f Riemann-int. und $\int\limits_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}$.

c) Sei $n \geq 3$ und

$$Z_n = \{0, \frac{1}{n} + \frac{1}{2^n}, \frac{1}{n-1} - \frac{1}{2^n}, \frac{1}{n-1} + \frac{1}{2^n}, \ldots, \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n}, 1 - \frac{1}{2^n}, 1\}.$$

Damit gilt für

$$O(Z_n, f) = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2^n}\right) + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{n} + (n-1)\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Somit ist $\inf\limits_{Z_n} O(Z_n, f) \leq \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{n-1}{2^{n-1}}\right) = 0$.
Da $f \geq 0$ ist, ist auch $U(Z_n, f) \geq 0$ für alle Z_n: $\sup\limits_{Z_n} U(Z_n, f) \geq 0$. Da weiter $\sup\limits_{Z_n} U(Z_n, f) \leq \inf\limits_{Z_n} O(Z_n, f)$, gilt $\sup\limits_{Z_n} U(Z_n, f) = \inf\limits_{Z_n} O(Z_n, f) = 0$. Außerdem ist damit f int. und

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0.$$

d) Sei $Z_n = \{0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \frac{3}{N}, \ldots, \frac{N-1}{N}, 1\}$, wobei $N = 1 + \frac{n(n-1)}{2}$.
Der Funktionswert 1 wird einmal angenommen ($x = 1$), der Wert $\frac{1}{2}$ auch ($x = \frac{1}{2}$). Für $n > 2$ wird der Wert $\frac{1}{n}$ maximal $(n-1)$-mal angenommen.

Damit ergibt sich

$$O(Z_n, f) \leq \frac{1}{N}\left(1 + \frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{3} + 3\cdot\frac{1}{4} + \cdots + (n-1)\cdot\frac{1}{n}\right) < n\cdot\frac{1}{N} = \frac{n}{1 + \frac{n(n-1)}{2}}.$$

$f \geq 0$ und somit ist $O(Z_n, f) \geq 0$ für alle Zerlegungen Z_n. Außerdem ist

$$\inf_{Z_n} O(Z_n, f) \leq \lim_{n\to\infty}\frac{n}{1 + \frac{n(n-1)}{2}} = 0.$$

Damit ist $\inf\limits_{Z_n} O(Z_n, f) = 0$.

Für alle Zerlegungen ist $U(Z_n, f) = 0$ und somit auch das sup davon. D.h. f ist int. und

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0.$$

Aufgabe G2

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Wir nehmen an, dass

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0.$$

(a) Zeigen Sie, dass $f(x) = 0$ für alle Punkte $x \in [a, b]$, in denen die Funktion stetig ist.

(b) Folgt auch, dass $f(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$?

Lösung:

a) Behauptung: $f(x) = 0$ in allen Stetigkeitspunkten!

Annahme: Behauptung falsch!

Dann ex. $x_0 \in [a, b]$: f stetig in x_0 und $f(x_0) > 0$

$\Rightarrow \exists\, \delta > 0$ mit $f(x) \geq \frac{1}{2} f(x_0)\ \forall\, x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

Wähle $Z = \{a,\ x_0 - \delta,\ x_0 + \delta,\ b\}$. Da $\inf_{x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]} f(x) \geq \frac{1}{2} f(x_0)$ und $f \geq 0$:

$$U(Z, f) \geq 0 \cdot (x_0 - \delta - a) + \frac{1}{2} f(x_0) \cdot 2\,\delta + 0 \cdot (b - x_0 - \delta) = \delta \cdot f(x_0).$$

$$\Rightarrow \sup_Z U(Z, f) > 0. \qquad \lightning \text{ zu } \int_a^b f(x)\,dx = 0.$$

b) Nein! Gegenbeispiel: siehe G1,c).

Aufgabe G3

Seien $f : [a, b] \to [c, d]$ und $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbare Funktionen. Kann man daraus schließen, dass die Funktion $g \circ f$ auch Riemann-integrierbar ist?

Lösung:

Nein! Gegenbeispiel:

Sei $[a, b] = [c, d] = [0, 1]$ und

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q};\ p, q\ -\ \text{teilerfremd} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

und

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = \frac{1}{n} \quad (n \geq 1) \\ 0 & \text{für } x \neq \frac{1}{n} \end{cases}.$$

Nach G1 sind beide Funktionen integrierbar. Aber

$$g(f(x)) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

$U(Z, g \circ f) = 0$ für alle Zerlegungen $Z \Rightarrow \sup_Z U(Z, g \circ f) = 0$.
$O(Z, g \circ f) = 1$ für alle Zerlegungen $Z \Rightarrow \inf_Z O(Z, g \circ f) = 1$.

Damit ist $g \circ f$ nicht integrierbar!

Hausübung

Die Hausaufgaben H2 und H3 sind als Präsentationsaufgaben geeignet!

Aufgabe H1 (5 Punkte)

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ (wobei $a < b$).

(a) Zeigen Sie, dass f eine Nullstelle in $[a, b]$ besitzt.

(b) Bleibt dieser Schluß richtig, wenn f zwar Riemann-integrierbar, aber unstetig ist?

Lösung:

(a) Da f stetig ist, gibt es nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung (Satz 8.25) ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$0 = \int_a^b f(x)\,dx = f(\xi) \cdot (b - a)\,.$$

Teilen durch $b - a$ liefert $f(\xi) = 0$.

(b) Die Funktion $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} -1 & \text{für } x \le 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

ist Riemann-integrierbar (klar?) und erfüllt $\int_{-1}^1 f(x)\,dx = 0$. Jedoch hat f keine Nullstelle.

Aufgabe H2 (6 Punkte)

Es sei $b > 0$ eine reelle Zahl. Berechnen Sie das Riemann–Integral

$$\int_0^b \sin(x)dx,$$

indem Sie in folgenden Schritten vorgehen:

a) Begründen Sie, warum das Riemann–Integral existieren muss.

b) Wählen Sie die Zerlegung $Z_n := \{x_0, \dots, x_n\}$ mit $x_k := k\frac{b}{n}$ und den Zwischenvektor $\xi^{(n)} := (\xi_0^{(n)}, \dots, \xi_{n-1}^{(n)})$ mit $\xi_k^{(n)} := x_k$. Vereinfachen Sie den Ausdruck der zugehörigen Riemann–Summe S_n (für geeignetes n) mit Hilfe von

$$\cos\left((k - \frac{1}{2})x\right) - \cos\left((k + \frac{1}{2})x\right) = 2\sin(kx) \cdot \sin(\frac{x}{2}).$$

c) Bestimmen Sie nun den Wert des Riemann–Integrals.

Lösung:

a) $f(x) = \sin(x)$ stetig auf $\mathbb{R}$, somit auch auf $[0, b]$ $\Rightarrow$ (Satz 8.11) R-integrierbar und Integral ex.

b) $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sin(k\frac{b}{n}) \cdot \frac{b}{n}$.

Sei n so groß, dass $b < n\pi$: $0 < \frac{b}{2n} < \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; \sin(\frac{b}{2n}) \neq 0$. Damit gilt:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cos((k-\frac{1}{2})\frac{b}{n}) - \cos((k+\frac{1}{2})\frac{b}{n})}{2\,\sin(\frac{b}{2n})} \cdot \frac{b}{n} \\ &= \frac{\frac{b}{n}}{2\,\sin(\frac{b}{2n})} \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)\frac{b}{n}\right) - \cos\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{b}{n}\right) \\ &= \frac{\frac{b}{n}}{2\,\sin(\frac{b}{2n})} \cdot \left(\cos\left(-\frac{b}{2n}\right) - \cos\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{b}{n}\right)\right). \end{aligned}$$

c)

$$
\begin{aligned}
\int_0^b \sin(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{b}{n}}{2\sin(\frac{b}{2n})} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\cos\left(-\frac{b}{2n}\right) - \cos\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{b}{n}\right)\right) \\
&= \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \cos(\frac{b}{2n})} \left(\cos\left(\lim_{n\to\infty} -\frac{b}{2n}\right) - \cos\left(\lim_{n\to\infty}\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{b}{n}\right)\right) \\
&= 1-\cos(b).
\end{aligned}
$$

Aufgabe H3 (8 Punkte)

Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion derart, daß

$$\int_a^b f(x)\cdot\phi(x)\,dx = 0$$

für jede stetige Funktion $\phi\colon [a,b]\to\mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß $f(x) = 0$ für fast alle x.

Lösung:

Wir zeigen zunächst, daß f in jeder Stetigkeitsstelle x_0 von f in $]a,b[$ verschwindet. Andernfalls, wenn etwa $f(x_0) > 0$, fänden wir nämlich ein $\delta > 0$ mit $[x_0-\delta, x_0+\delta] \subset [a,b]$ und $f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$ für alle $x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$. Betrachte die "Zackenfunktion" (Skizze ?) $\phi\colon [a,b]\to\mathbb{R}$,

$$\phi(x) := \begin{cases} 1-\frac{|x-x_0|}{\delta} & \text{falls } |x-x_0|\le\delta \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist ϕ stetig (klar ?), und wir erhalten die absurde Aussage

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_a^b f(x)\phi(x)\,dx = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\phi(x)\,dx \ge \int_{x_0-\delta/2}^{x_0+\delta/2} f(x)\phi(x)\ dx \\
&\ge \int_{x_0-\delta/2}^{x_0+\delta/2} \frac{f(x_0)}{2}\cdot\frac{1}{2}\,dx \ge \delta\cdot\frac{f(x_0)}{4} > 0\,.
\end{aligned}
$$

Also muß doch $f(x_0) = 0$ gewesen sein.

Die Menge $N := f^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ ist nach dem Vorigen in der Menge $\{a,b\}\cup\Delta(f)$ enthalten, welche eine Nullmenge ist aufgrund der Riemann-Integrierbarkeit von f. Somit ist N eine Nullmenge, wie behauptet.