Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Nada Sissouno
Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/2010
11.02.2010

15. Übungsblatt zur „Analysis II“

Gruppenübung

Aufgabe G1

Wir betrachten die Menge $G := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^4 + z^6 \leq 1\}$ und das Vektorfeld

$$F \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\,, \qquad F(x,y,z) \;:=\; \big(x^2y^3,\, xz + xy^4,\, \cos(xy)\big)\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass G ein C^1-Normalbereich ist.

(b) Berechnen Sie das Flächenintegral

$$\int_{\partial G} F \cdot N \, d\sigma.$$

Hierbei ist $N : \partial K \to \mathbb{R}^3$ das äußere Normalenfeld von G.

Lösung:

(a) G ist ein C^1-Normalbereich bzgl. der xy-Ebene, da

$$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (x,y) \in K,\, \phi_1(x,y) \leq z \leq \phi_2(x,y)\},$$

wobei $K = \{(x,y) \,:\, x^2 + y^4 \leq 1\}$ eine Kompakte Menge ist mit einem Rand $\partial K = \{(x,y) \,:\, x^2 + y^4 = 1\}$, der durch einen stetig differenzierbaren Weg darstellbar ist, und $\phi_1(x,y) = -\sqrt[6]{1-x^2-y^4}$ und $\phi_2(x,y) = \sqrt[6]{1-x^2-y^4}$ stetig differenzierbar sind. Ähnlich zeigt man, dass G auch ein C^1-Normalbereich bzgl. den xz- und yz-Ebenen ist.

(b) Da $\operatorname{div} F(x,y,z) = 2xy^3 + 4xy^3 = 6xy^3$, erhalten wir mit dem Gaußschen Integralsatz

$$\begin{aligned}
\int_{\partial G} F \cdot N \, d\sigma &= \int_G \operatorname{div} F(x,y,z) \, d(x,y,z) \\
&= \int_G 6\,xy^3 \, d(x,y,z) \\
&= \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt[4]{1-x^2}}^{\sqrt[4]{1-x^2}} \int_{-\sqrt[6]{1-x^2-y^4}}^{\sqrt[6]{1-x^2-y^4}} 6\,xy^3 \, dz\, dy\, dx \\
&= \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt[4]{1-x^2}}^{\sqrt[4]{1-x^2}} 12\,xy^3 \sqrt[6]{1-x^2-y^4} \, dy\, dx \\
&= \int_{-1}^{1} \Big[-\frac{18}{7} x\,(1-x^2-y^4)^{7/6}\Big]_{y=-\sqrt[4]{1-x^2}}^{y=\sqrt[4]{1-x^2}} dx \;=\; 0\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe G2

Berechnen Sie den Fluss $\int_{\partial B} F \cdot N\, d\sigma$ des Vektorfeldes

$$F(x,y,z) = (xy^2, x^2y, y)$$

durch die Oberfläche des Zylinderabschnitts $B = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le 1, -1 \le z \le 1\}$ und Bestimmen Sie die Quellpunkte von F.

Lösung:

Man zeigt leicht, dass B ein C^1-Normalbereich ist, also lässt sich der Fluss von F mit dem Gaußschen Integralsatz bestimmen:

$$\int_{\partial B} F \cdot N\, d\sigma = \int_B \mathrm{div} F(x,y,z)\, d(x,y,z) = \int_B (x^2+y^2)\, dx\, dy\, dz.$$

Um diese Integral ausrechnen zu können, gehen wir auf Zylinderkoordinaten über. Sei also

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, g(r,\phi,z) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$$

und $T = [0,1] \times [0,2\pi] \times [-1,1]$. T ist kompakt und Jordan-messbar, $g(T) = B$, ∂T hat Jordaninhalt 0 und auf $\mathrm{int}(T)$ ist g injektiv und $\det g' = r > 0$. Es gilt also:

$$\begin{aligned}
\int_B (x^2+y^2)\, dx\, dy\, dz &= \int_T r^3\, d(r,\varphi,z) \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 r^3 dz\, d\varphi\, dr \\
&= 4\pi \left[\frac{1}{4} r^4\right]_0^1 = \pi.
\end{aligned}$$

Da $\mathrm{div}\, F = x^2+y^2 \neq 0$ für $(x,y) \neq (0,0)$, ist jeder Punkt außerhalb der z-Achse ein Quellpunkt.

Aufgabe G3

Es sei $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld und $x_0 \in \mathbb{R}^3$. Für $r > 0$ bezeichne K_r die abgeschlossene Kugel vom Radius r um x_0. Wir betrachten den Fluss

$$\Phi_r := \int_{\partial K_r} F \cdot N\, d\sigma$$

von F durch die Sphäre ∂K_r vom Radius r um x_0.

Zeigen Sie mit dem Gaußschen Integralsatz, dass

$$\lim_{r\to 0} \frac{\Phi_r}{|K_r|} = \mathrm{div}\, F(x_0)\,.$$

Hinweis: Schreiben Sie $\mathrm{div}\, F(x_0) = \frac{1}{|K_r|} \int_{K_r} \mathrm{div}\, F(x_0)\, dx$.

Lösung:

Nach dem Gaußschen Integralsatz ist

$$\int_{\partial K_r} F \cdot N\, d\sigma = \int_{K_r} \mathrm{div}\, F(x)\, dx\,.$$

Daher

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\Phi_r}{|K_r|} - \mathrm{div}\, F(x_0)\right| &= \left|\frac{1}{|K_r|}\int_{K_r} \mathrm{div}\, F(x)\, dx - \frac{1}{|K_r|}\int_{K_r} \mathrm{div}\, F(x_0)\, dx\right| \\
&= \frac{1}{|K_r|} \left|\int_{K_r} \big(\mathrm{div}\, F(x) - \mathrm{div}\, F(x_0)\big)\, dx\right| \\
&\le \frac{1}{|K_r|} \int_{K_r} \big|\mathrm{div}\, F(x) - \mathrm{div}\, F(x_0)\big|\, dx.
\end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Da $\operatorname{div} F$ stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass $|\operatorname{div} F(y) - \operatorname{div} F(x_0)| \leq \varepsilon$ für alle $y \in K_\delta$. Für alle $0 < r \leq \delta$ gilt nach vorigen Abschätzungen dann

$$\left|\frac{\Phi_r}{|K_r|} - \operatorname{div} F(x_0)\right| \leq \frac{1}{|K_r|} \int_{K_r} \big|\operatorname{div} F(x) - \operatorname{div} F(x_0)\big| \, dx \leq \frac{1}{|K_r|} \int_{K_r} \epsilon \, dx = \frac{1}{|K_r|} |K_r| \epsilon = \epsilon.$$

Somit ist

$$\lim_{r \to 0} \frac{\Phi_r}{|K_r|} \; = \; \operatorname{div} F(x_0)$$

bewiesen.

Aufgabe G4

Es sei $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Zeigen Sie, dass folgende Bedingungen äquivalent sind:

(a) F ist "quellenfrei," d.h. es ist $\operatorname{div} F = 0$.

(b) Für jeden C^1-Normalbereich $G \subseteq \mathbb{R}^3$ gilt

$$\int_{\partial G} F \cdot N \, d\sigma = 0 \, .$$

Lösung:

(a) $\Rightarrow$ (b): Wir nehmen an, dass F quellenfrei ist, d.h. $\operatorname{div} F = 0$. Für jedes C^1-Normalbereich $G \subseteq \mathbb{R}^3$ liefert der Gaußsche Integralsatz

$$\int_{\partial G} F \cdot N \, d\sigma = \int_G \operatorname{div} F(x) \, dx = 0,$$

womit (b) gilt.

(b) $\Rightarrow$ (a): Wir nehmen an, dass (b) erfüllt ist. Sei $x_0 \in \mathbb{R}^3$; wir wollen zeigen, dass $\operatorname{div} F(x_0) = 0$. Dies folgt aus der letzen Aufgabe, denn mit den dortigen Notationen gilt

$$\operatorname{div} F(x_0) \; = \; \lim_{r \to 0} \frac{\Phi_r}{|K_r|} \; = \; 0 \, ,$$

da die Flächenintegrale per Voraussetzung (b) verschwinden.