Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Nada Sissouno
Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/2010
04.02.2010

14. Übungsblatt zur „Analysis II“

Gruppenübung

Aufgabe G1

Untersuche, für welche $\alpha > 0$ das uneigentliche Riemann-Integral

$$\int_{B_1(0)} r^{-\alpha} d(x,y,z) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{B_1(0) \setminus \mathrm{int}(B_\varepsilon(0))} r^{-\alpha} d(x,y,z)$$

(mit $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ und $B_R(0) = \{x \in \mathbb{R}^3 \,:\, \|x\|_2 \le R\}$) existiert. Berechne gegebenenfalls den Wert des Integrals.

Lösung:

Wir benutzen Kugelkoordinaten (Seiten 270 und 271 im Skript). Sei $T_\varepsilon = [\varepsilon, 1] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi]$ und

$$g(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi \\ r\sin\theta \end{pmatrix}.$$

Dann gilt: T_ε ist eine kompakte und Jordan-messbare Teilmenge von $\mathbb{R}^3$, $B_1(0)\setminus\mathrm{int}(B_\varepsilon(0)) = g(T_\varepsilon)$, ∂T_ε hat Jordaninhalt 0 und auf $\mathrm{int}(T_\varepsilon)$ ist g injektiv und $\det g'$ stets negativ. Also:

$$\begin{aligned}
\int_{B_1(0)\setminus\mathrm{int}(B_\varepsilon(0))} r^{-\alpha} d(x,y,z) &= \int_{T_\varepsilon} r^{-\alpha} |\det g'(r,\theta,\varphi)|\, d(r,\theta,\varphi) \\
&= \int_\varepsilon^1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} r^{-\alpha}\, r^2 \cos\theta \, d\varphi\, d\theta\, dr \\
&= 2\pi \int_\varepsilon^1 r^{2-\alpha} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta\, dr \\
&= 4\pi \int_\varepsilon^1 r^{2-\alpha} dr \\
&= \begin{cases} 4\pi \frac{r^{3-\alpha}}{3-\alpha}\Big|_\varepsilon^1 & \text{falls } \alpha \neq 3 \\ 4\pi \log r\big|_\varepsilon^1 & \text{falls } \alpha = 3 \end{cases}
\end{aligned}$$

Also existiert $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{B_1(0)\setminus\mathrm{int}(B_\varepsilon(0))} r^{-\alpha} d(x,y,z)$ für $\alpha < 3$ und dann gilt

$$\int_{B_1(0)} r^{-\alpha} d(x,y,z) = \frac{4\pi}{3-\alpha}.$$

Aufgabe G2

Skizzieren Sie die Menge B und berechnen Sie ihr Volumen:

$$B \;:=\; \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \colon z^2 \geq x^2+y^2 \text{ und } 0\leq z\leq \sqrt{1-x^2-y^2}\right\}.$$

Lösung:

Zur Berechnung des Volumens von B benutzen wir Kugelkoordinaten,

$$g\colon [0,\infty[\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\times[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3\,,\qquad g(r,\theta,\phi) \;:=\; \big(r\cos\theta\cos\phi,\; r\cos\theta\sin\phi,\; r\sin\theta\big)$$

Die Menge $T := [0,1]\times[\pi/4,\pi/2]\times[0,2\pi]$ wird von g surjektiv auf B abgebildet. Da T eine kompakte und Jordan-messbare Teilmenge von $\mathbb{R}^3$ ist, ∂T Jordaninhalt 0 hat und auf $\operatorname{int}(T)$ die Funktion g injektiv und die Determinante $\det g'$ stets negativ ist, gilt:

$$\begin{aligned}
|B| \;&=\; \int_B d(x,y,z)\\
&=\; \int_T |\det g'(r,\theta,\phi)|\; d(r,\theta,\phi)\\
&=\; \int_0^1\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^{2\pi} r^2\cos\theta\; d\phi\, d\theta\, dr\\
&=\; 2\pi\int_0^1 r^2\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos\theta\; d\theta\, dr \;=\; 2\pi\int_0^1 r^2\,\Big[\sin\theta\Big]_{\theta=\pi/4}^{\pi/2}\,dr\\
&=\; 2\pi\big(1-\sqrt{2}/2\big)\Big[r^3/3\Big]_{r=0}^1 \;=\; \frac{2\pi}{3}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).
\end{aligned}$$

Aufgabe G3

Finden Sie eine geeignete Variablensubstitution, um die Fläche von dem Gebiet A in $\mathbb{R}^2$ zu bestimmen, dass zwischen den Parabeln $y=x^2$ und $y=2x^2$ und den Parabeln $x=y^2$ und $x=3y^2$ liegt.

Lösung:

Wir betrachten die Koordinatentransformation $g:(0,\infty)\times(0,\infty)\to(0,\infty)\times(0,\infty)$, wobei wir $(u,v)\in(0,\infty)\times(0,\infty)$ auf dem einzigen Punkt (x,y) in $(0,\infty)\times(0,\infty)$ abbilden, wo die Parabeln

$$y=ux^2 \qquad\text{und}\qquad x=vy^2$$

sich schneiden. (Machen Sie eine Skizze.) Dann gilt $y=ux^2=uv^2y^4$. Da $y>0$ folgt hieraus, dass $1=uv^2y^3$ und

$$y=\sqrt[3]{\frac{1}{uv^2}}.$$

Ähnlich zeigt man:

$$x=\sqrt[3]{\frac{1}{u^2v}}.$$

Wir werden also die Koordinatentransformation $g=(g_1,g_2)^T:(0,\infty)\times(0,\infty)\to(0,\infty)\times(0,\infty)$ verwenden, gegeben durch

$$g_1(u,v)=\sqrt[3]{\frac{1}{u^2v}}\qquad g_2(u,v)=\sqrt[3]{\frac{1}{uv^2}}.$$

g ist bijektiv und stetig differenzierbar, und auch seine Inverse $f=g^{-1}$ mit

$$f_1(x,y)=u=\frac{y}{x^2}\qquad\text{und}\qquad f_2(x,y)=v=\frac{x}{y^2}$$

ist stetig differenzierbar. Die Determinante

$$\det f'(x,y) = \det \begin{pmatrix} -2y/x^3 & 1/x^2 \\ 1/y^2 & -2x/y^3 \end{pmatrix} = \frac{3}{x^2y^2} > 0$$

ist positiv für alle $x, y > 0$. Also auch für $(x,y)^T = g(u,v)$ gilt

$$\det g'(u,v) = (\det f'(x,y))^{-1} = \frac{x^2y^2}{3} = \frac{1}{3u^2v^2} > 0.$$

Sei jetzt $T = [1,2] \times [1,3]$. Dann gilt $f(A) = T$ und damit $A = g(T)$. Aus der Substitutionsregel folgt jetzt, dass

$$|A| = \int_A d(x,y) = \int_T \frac{1}{3u^2v^2}\, d(u,v) = \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{1}{u^2}\, du \int_1^3 \frac{1}{v^2}\, dv = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{9}.$$

Aufgabe G4

Die Mantelfläche eines Kugelsegments ist gegeben durch

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z^2 = 1 - x^2 - y^2, \ \frac{1}{2} \le z \le 1\}.$$

(a) Berechnen Sie den Flächeninhalt von $\mathcal{F}$.

(b) Eine stationäre Strömung werde durch das Vektorfeld w mit

$$H(x,y,z) = (y, -x, z)^T$$

beschrieben. Berechnen Sie den Fluß von H durch $\mathcal{F}$, d.h. das Integral

$$\iint_{\mathcal{F}} H \cdot \ d\overrightarrow{\sigma}.$$

Lösung:

(a) Schreiben wir $u := x$ und $v := y$, dann gilt:

$$z^2 = 1 - x^2 - y^2 = 1 - (u^2+v^2) \quad \Leftrightarrow \quad z = \sqrt{1-(u^2+v^2)}, \quad \text{da } z \ge \frac{1}{2}.$$

Weiterhin ergibt sich aus $z = \sqrt{1-(u^2+v^2)}$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \le \sqrt{1-(u^2+v^2)} \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4} \le 1-(u^2+v^2) \le 1 \\ \Leftrightarrow \quad & -\frac{1}{4} \ge u^2+v^2-1 \ge -1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{4} \ge u^2+v^2 \ge 0 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir folgende Parameterdarstellung von F:

$$\rho(u,v) = \left(u, v, \sqrt{1-(u^2+v^2)}\right)^T \quad \text{mit} \quad (u,v) \in S = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le u^2+v^2 \le \frac{3}{4}\right\}.$$

Wir bestimmen $\|\rho_u(u,v) \times \rho_v(u,v)\|$:

$$\rho_u(u,v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{u}{\sqrt{1-(u^2+v^2)}} \end{pmatrix}, \quad \rho_v(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{v}{\sqrt{1-(u^2+v^2)}} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \rho_u(u,v) \times \rho_v(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{u}{\sqrt{1-(u^2+v^2)}} \\ \frac{v}{\sqrt{1-(u^2+v^2)}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \|\rho_u(u,v) \times \rho_v(u,v)\| = \sqrt{\frac{u^2}{1-(u^2+v^2)} + \frac{v^2}{1-(u^2+v^2)} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1-(u^2+v^2)}}.$$

Für den Flächeninhalt von $\mathcal{F}$ gilt (vgl. Formel 14.8, Seite 278):

$$I(\mathcal{F}) = \int_S \|\rho_u(u,v) \times \rho_v(u,v)\| \; du\,dv = \int_S \frac{1}{\sqrt{1-(u^2+v^2)}} \, du\,dv$$

Wir lösen dieses Integral mittels Einführung von Polarkoordinaten. Setze $u := r\cos\varphi$, $v := r\sin\varphi$. Dann gilt:

$$0 \le r^2 \le \frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le r \le \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Somit erhalten wir:

$$I(\mathcal{F}) = \int_S \frac{1}{\sqrt{1-(u^2+v^2)}} \, du\,dv = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \, dr\,d\varphi$$

Substituieren wir $t = 1 - r^2$ mit $\frac{dt}{dr} = -2r$, dann ergibt sich:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \, dr\,d\varphi &= \int_0^{2\pi} \int_1^{\frac{1}{4}} -\frac{1}{2\sqrt{t}} \, dt\,d\varphi = \int_0^{2\pi} \left[-\sqrt{t}\right]_1^{\frac{1}{4}} \, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \, d\varphi = \pi\end{aligned}$$

(b) Wir bestimmen den Einheitsnormalenvektor an F:

$$N(u,v) = \frac{\rho_u \times \rho_v}{\|\rho_u \times \rho_v\|} = \sqrt{1-(u^2+v^2)} \begin{pmatrix} \frac{u}{\sqrt{1-(u^2+v^2)}} \\ \frac{v}{\sqrt{1-(u^2+v^2)}} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \sqrt{1-(u^2+v^2)} \end{pmatrix}$$

Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned} H(\rho(u,v)) &= (v, -u, \sqrt{1-(u^2+v^2)})^T \quad \text{und} \\ H(\rho(u,v)) \cdot N(u,v) &= uv - uv + 1 - (u^2+v^2) = 1 - (u^2+v^2). \end{aligned}$$

Also erhalten wir (vgl. Formel 14.11, Seite 279):

$$\iint_F H \cdot d\vec{\sigma} = \int_S \frac{1-(u^2+v^2)}{\sqrt{1-(u^2+v^2)}} \, du\,dv = \int_S \sqrt{1-(u^2+v^2)} \, du\,dv$$

Dieses Integral lösen wir ebenfalls mittels Polarkoordinaten (und der Substitution $t = 1 - r^2$, vgl. Aufgabenteil (a)). Dann erhalten wir:

$$\begin{aligned}\iint_F H \cdot \, d\vec{\sigma} &= \int_S \sqrt{1-(u^2+v^2)} \, du\,dv = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-r^2} \; r \; dr\,d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_1^{\frac{1}{4}} -\frac{\sqrt{t}}{2} \, dt\,d\varphi = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{3} \, t^{\frac{3}{2}}\right]_1^{\frac{1}{4}} \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{7}{24} \, d\varphi = \frac{7}{12}\pi \,.\end{aligned}$$