Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Nada Sissouno
Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/2010
28.01.2010

13. Übungsblatt zur „Analysis II“

Gruppenübung

Aufgabe G1

Entscheiden Sie, welche der folgenden Mengen Nullmengen in $\mathbb{R}^3$ sind. Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $\mathbb{Z}^3 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

(b) $U \subseteq \mathbb{R}^3, U$ offen.

(c) $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$.

Lösung:

(a) $\mathbb{Z}^3$ ist abzählbar. Sei $(a_i)_i$ eine Abzählung und sei

$$I_i := (a_i^{(1)} - \epsilon\frac{1}{n}, a_i^{(1)} + \epsilon\frac{1}{n}) \times (a_i^{(2)} - \epsilon\frac{1}{n}, a_i^{(2)} + \epsilon\frac{1}{n}) \times (a_i^{(3)} - \epsilon\frac{1}{n}, a_i^{(3)} + \epsilon\frac{1}{n}).$$

Dann gilt $\mathbb{Z}^3 \subseteq \bigcup_i I_i$ und

$$\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| = 8\epsilon^3 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \leq C\epsilon.$$

Also ist $\mathbb{Z}^3$ (wie jede abzählbare Menge) eine Nullmenge.

(b) Ist $U = \emptyset$, dann ist U eine Nullmenge. Sei also $U \neq \emptyset$, also gibt es ein $x \in U$. Weil U offen ist, gibt es ein $\rho > 0$, so dass $I := (x_1 - \rho, x_1 + \rho) \times (x_2 - \rho, x_2 + \rho) \times (x_3 - \rho, x_3 + \rho) \subseteq U$. Dann gilt auch

$$J := (x_1 - \frac{\rho}{2}, x_1 + \frac{\rho}{2}) \times (x_2 - \frac{\rho}{2}, x_2 + \frac{\rho}{2}) \times (x_3 - \frac{\rho}{2}, x_3 + \frac{\rho}{2}) \subseteq U.$$

Angenommen U ist eine Nullmenge. Aus der Definition der Nullmenge folgt sofort, dass dann auch J eine Nullmenge ist. Da J auch kompakt ist, gilt nach der Bemerkung im Beweis von Satz 13.27

$$0 = \int_J 1\, dx = \int_{x-\frac{\rho}{2}}^{x+\frac{\rho}{2}} \int_{x-\frac{\rho}{2}}^{x+\frac{\rho}{2}} \int_{x-\frac{\rho}{2}}^{x+\frac{\rho}{2}} 1\, dx = \rho^3.$$

Widerspruch!

(c) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = 0$, B_n $(n \in \mathbb{N})$ die Kugel in $\mathbb{R}^2$ mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius n und X_n der Graph der Funktion f mit Domän beschränkt auf B_n. Nach dem Satz 13.30 ist X_n eine Jordansche Nullmenge und damit auch eine Nullmenge (siehe die Bemerkung vor Folgerung 13.29 auf Seite 256). Die Menge $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ ist der Graph der Funktion f auf ganz

R^2, und damit die Vereinigung der X_n. Aber Lemma 8.13(b) besagt, dass die Abzählbare Vereinigung von Nullmengen, wieder eine Nullmenge ist (siehe auch die Bemerkung oben an Seite 249 im Skript). Also ist $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ eine Nullmenge.

Aufgabe G2

Bestimmen Sie den Wert des Integrals

$$\int_D f(x,y)\, d(x,y)$$

für die Funktion $f(x,y) = y$ und das Gebiet D zwischen dem oberen Einheitskreis (d.h. $x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$) und der Funktion $y = 1 - x^2$.

Hinweis: Überlegen Sie sich, wie das Gebiet aussieht und welche Integrationsreihenfolge zweckmäßig ist.

Lösung:

Sei $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, -1 \leq x \leq 1, 1 - x^2 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_D f(x,y)\, d(x,y) &= \int_{-1}^{1} \int_{1-x^2}^{\sqrt{1-x^2}} y\, dy\, dx \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{y^2}{2} \Big|_{1-x^2}^{\sqrt{1-x^2}}\, dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} [(1-x^2) - (1-x^2)^2]\, dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} (x^2 - x^4)\, dx = \frac{2}{15}
\end{aligned}$$

Aufgabe G3

Es sei B ein Normalbereich bezüglich der $x-$ und der $y-$Achse, d.h.

$$\begin{aligned}
B &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, a \leq x \leq b, \;\; \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\} \\
&= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, c \leq y \leq d, \;\; \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}
\end{aligned}$$

mit stetigen Funktionen $\phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2$.

(a) Zeige: Ist f stetig auf B, so gilt

$$\int_a^b \Big(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\, dy \Big)\, dx = \int_c^d \Big(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\, dx \Big)\, dy.$$

(b) Sei f eine stetige Riemann-integrierbare Funktion. Vertausche die Reihenfolge der Integrationen für

$$\int_{-1}^{1} \int_0^{1-x^2} f(x,y)\, dy\, dx.$$

(c) Berechne das Integral

$$\int_B xy\, d(x,y), \qquad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + y^2 \leq r^2\}.$$

Lösung:

(a) Ist f auf einem Normalbereich (bezüglich der $x-$Achse) stetig, so läßt sich Satz 13.34 anwenden:

$$\int_B f(x,y)\,d(x,y) = \int_a^b \Big(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy \Big) dx.$$

Indem man die Variablen x und y vertauscht, folgt, dass für einen Normalbereich bezüglich der $y-$Achse gilt

$$\int_B f(x,y)d(x,y) = \int_c^d \Big(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \Big) dy.$$

Also gilt die Gleichheit der beiden Integrale.

(b) Es ist

$$\begin{aligned} B &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 - x^2\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le y \le 1,\ -\sqrt{1-y} \le x \le \sqrt{1-y}\}, \end{aligned}$$

da $y \le 1 - x^2 \iff |x| \le \sqrt{1-y}$. Also gilt

$$\int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)\,dx\,dy.$$

(c) Da $x^2 + y^2 \le r^2 \iff -r \le x \le r, -\sqrt{r^2-x^2} \le y \le \sqrt{r^2-x^2}$ gilt

$$\begin{aligned} \int_B xy\,d(x,y) &= \int_{-r}^r \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} xy\,dy\,dx \\ &= \int_{-r}^r \frac{xy^2}{2} \Big|_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} dx \\ &= \int_{-r}^r 0\,dx = 0. \end{aligned}$$

Hausübung

Die Hausaufgaben H1 und H2 sind als Präsentationsaufgaben geeignet!

Aufgabe H1 (4+3 Punkte)

Wir betrachten die Zylinder

$$Z_1 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 \le 1\} \quad \text{und}$$

$$Z_2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + z^2 \le 1\}$$

sowie ihre Schnittmenge $M := Z_1 \cap Z_2$. (Machen Sie eine Skizze!)

(a) Bestimmen Sie für festes $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ die Menge

$$M_{(x,y)} \;:=\; \{z \in \mathbb{R} \colon (x,y,z) \in M\}$$

and berechnen Sie den Inhalt $|M_{(x,y)}|$.

(b) Berechnen Sie das Volumen $|M|$ von M.

Lösung:

(a) Es seien $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und $z \in \mathbb{R}$. Dann

$$\begin{aligned} (x,y,z) \in M &\Leftrightarrow (x,y,z) \in Z_1 \text{ und } (x,y,z) \in Z_2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 1 \text{ und } x^2 + z^2 \leq 1. \end{aligned}$$

Somit

$$M_{(x,y)} = \begin{cases} \left[-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}\,\right] & \text{wenn } x^2+y^2 \leq 1 \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

Also ist $|M_{(x,y)}| = 2\sqrt{1-x^2}$ wenn $x^2 + y^2 \leq 1$, andernfalls $|M_{(x,y)}| = 0$.

(b) Es sei $\mathbb{D} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1\}$ die Einheitskreisscheibe. Dann gilt:

$$\begin{aligned} |M| &= \int_{\mathbb{D}} 2\sqrt{1-x^2}\, d(x,y) \\ &= \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 2\sqrt{1-x^2}\, dy\, dx \\ &= \int_{-1}^{1} 4(1-x^2)\, dx \\ &= \left[4x - \frac{4}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{16}{3}\,. \end{aligned}$$

Aufgabe H2 (4 Punkte)

Zeigen Sie: Wenn $M \subseteq \mathbb{R}^m$ eine beschränkte Menge ist, deren Abschluss nur endlich viele Häufungspunkte $x_1, \ldots, x_n$ hat, dann ist M eine Jordansche Nullmenge.

Lösung:

Sei $\overline{M} \subseteq \mathbb{R}^m$ der Abschluss von M. Wir zeigen zuerst, dass $\overline{M}$ eine Nullmenge ist. Nicht nur M, sondern auch $\overline{M}$ ist beschränkt. Seien ferner $x_1, \ldots, x_n$ die Häufungspunkte der Menge $\overline{M} \subseteq \mathbb{R}^m$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann überdecken wir $x_1, \ldots, x_n$ mit Würfeln $R_1, \ldots R_n$ mit Mittelpunkten $x_1, \ldots, x_n$ und Kantenlänge $\sqrt[m]{\frac{\varepsilon}{2n}}$. Betrachte $N = \overline{M} - \bigcup_{i=1}^{n} R_n$. N ist beschränkt und hat keine Häufungspunkte und muß deshalb, nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass, endlich sein. Seien also $x_{n+1}, \ldots, x_{n+L}$ die Elemente von N und überdecke $x_{n+1}, \ldots, x_{n+L}$ mit Würfeln $R_{n+1}, \ldots, R_{n+L}$ mit Kantenlänge $\sqrt[m]{\frac{\varepsilon}{2L}}$. Dann gilt

$$M \subseteq \bigcup_{j=1}^{n+L} R_j, \qquad \sum_{j=1}^{n+L} |R_j| = n \cdot \frac{\varepsilon}{2n} + L \cdot \frac{\varepsilon}{2L} = \varepsilon.$$

Also ist $\overline{M}$ eine kompakte Nullmenge und nach der Bemerkung im Beweis von Satz 13.27 auf Seite 255 Jordan-messbar mit Jordan-Inhalt 0. Da $\partial M \subseteq \overline{M}$, ist auch ∂M eine Nullmenge. Jetzt folgt mit Satz 13.21, dass M Jordan-messbar ist und da $M \subseteq \overline{M}$ hat M Jordan-Inhalt 0.

Aufgabe H3 (3+5 Punkte)

Gegeben seien $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 0 \leq x \leq 1,\; 0 \leq y \leq 1\}$ und die Funktion $f(x, y) = \frac{x-y}{(x+y)^3}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion f in $(0, 0)$ nicht stetig fortsetzbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\; dy \right) dx = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\; dx \right) dy = -\frac{1}{2}$$

gilt.

Erläutern Sie, warum das Integral

$$\int_G f(x,y)\ d(x,y)$$

nicht existiert.

Lösung:

(a) Wähle die Folge

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right) \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Es gilt:

$$f(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n}}{\left(\frac{3}{n}\right)^3} = \frac{n^2}{27},$$

und somit $\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \infty$. Also ist f in $(0,0)$ nicht stetig fortsetzbar.

(b) Wir berechnen das erste Integral.
Substituiere

$$u = x + y \quad \text{mit} \quad \frac{du}{dy} = 1 \quad \text{und} \quad x - y = 2x - u.$$

Dann ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int_0^1\left(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\ dy\right) dx &= \int_0^1\left(\int_x^{x+1} \frac{2x-u}{u^3}\ du\right) dx = \int_0^1\left(\int_x^{x+1} \left(\frac{2x}{u^3} - \frac{1}{u^2}\right)\ du\right) dx \\
&= \int_0^1 \left[-\frac{x}{u^2} + \frac{1}{u}\right]_{u=x}^{u=x+1} dx \\
&= \int_0^1 \left(-\frac{x}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} + \frac{x}{x^2} - \frac{1}{x}\right) dx = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}\ dx \\
&= -\frac{1}{x+1}\bigg|_0^1 = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Mittels derselben Substitution berechnen wir das zweite Integral, wobei hier $x - y = u - 2y$. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int_0^1\left(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\ dx\right) dy &= \int_0^1\left(\int_y^{y+1} \frac{u-2y}{u^3}\ du\right) dy = \int_0^1\left(\int_y^{y+1} \left(\frac{1}{u^2} - \frac{2y}{u^3}\right)\ du\right) dy \\
&= \int_0^1 \left[-\frac{1}{u} + \frac{y}{u^2}\right]_{u=y}^{u=y+1} dy \\
&= \int_0^1 \left(-\frac{1}{y+1} + \frac{y}{(y+1)^2} + \frac{1}{y} - \frac{y}{y^2}\right) dx = -\int_0^1 \frac{1}{(y+1)^2}\ dx \\
&= -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Da sich für diese beiden Integrale verschiedene Werte ergeben, kann das Gebietsintegral (nach Seite 251) nicht existieren. (Man hätte auch sagen können, dass Riemann-integrierbare Funktionen beschränkt sind.)