Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Nada Sissouno
Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/2010
21.01.2010

12. Übungsblatt zur „Analysis II“

Gruppenübung

Aufgabe G1

Kreuzen Sie die richtigen Aussagen an. Sei $V = C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Dann gilt

( ) Jedes geschlossene Vektorfeld $f \in V$ besitzt ein Potential.
( ) Jedes Vektorfeld $f \in V$ besitzt ein Potential.
( ) Jedes Gradientenvektorfeld $f \in V$ ist geschlossen.
( ) Jedes geschlossene Vektorfeld auf einem sternförmigen Gebiet besitzt ein Potential.

Lösung:

( ) Jedes geschlossene Vektorfeld $f \in V$ besitzt ein Potential.
( ) Jedes Vektorfeld $f \in V$ besitzt ein Potential.
(x) Jedes Gradientenvektorfeld $f \in V$ ist geschlossen.
(x) Jedes geschlossene Vektorfeld auf einem sternförmigen Gebiet besitzt ein Potential.

Aufgabe G2

(a) Bestimmen Sie die Länge der Kurve $\gamma : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3 : t \mapsto (\cos t, \sin t, t)$.

(b) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\Gamma (-y, x, z^2) \cdot dX$ über $\Gamma = \gamma(0, 2\pi)$.

Lösung:

(a) Für die Länge der Kurve gilt

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \left\|\gamma'(t)\right\| dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1}\, dt = 2\sqrt{2}\pi. \end{aligned}$$

(b) Das Kurvenintegral berechnen wir mit

$$\begin{aligned} \int_\Gamma (-y, x, z^2) \cdot dX &= \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t, t^2) \cdot (-\sin t, \cos t, 1) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t + t^2) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (1 + t^2) dt \\ &= (t + \frac{1}{3} t^3)|_0^{2\pi} = 2\pi + \frac{8}{3}\pi^3 \end{aligned}$$

Aufgabe G3

Betrachte das Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(xy) + xy\exp(xy) \\ x^2\exp(xy) - 2y \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass dieses Vektorfeld eine Potentialfunktion besitzt.

(b) Berechnen Sie diese Potentialfunktion F.
Hinweis: Wir wissen, dass $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = f_1(x,y)$. Bestimmen Sie eine Funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ so, dass

$$F(x,y) = h(x,y) + g(y)$$

mit einem $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. Danach bestimme die Funktion g.

(c) Differenzieren Sie F, um zu überprüfen, dass es sich wirklich um ein Potential handelt.

(d) Berechnen Sie für den Weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t, 1-t^2)$ das Wegintegral

$$\int_\gamma f(x) \cdot dx.$$

Lösung:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) &= x\exp(xy) + x\exp(xy) + x^2y\exp(xy) \\ &= 2x\exp(xy) + x^2y\exp(xy) \\ &= \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y). \end{aligned}$$

Weil $\mathbb{R}^2$ ein sternförmiges Gebiet ist, gibt es daher eine Potentialfunktion.

(b) Für festes y gilt

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \exp(xy) + xy\exp(xy) = \frac{\partial}{\partial x}(x\exp(xy)).$$

Also

$$F(x,y) = x\exp(xy) + g(y)$$

mit einem $g(y) \in \mathbb{R}$. Da $g(y) = F(x,y) - x\exp(xy)$, ist die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Desweiteren

$$x^2\exp(xy) - 2y = f_2(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y}(xy) = x^2\exp(xy) + g'(y).$$

Das impliziert $g'(y) = -2y$ and also $g(y) = -y^2 + C$ mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$. Wir setzen $C = 0$ und erhalten

$$F(x,y) = x\exp(xy) - y^2$$

als eine Potentialfunktion.

(c) $\operatorname{grad} F(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$.

(d) Da f ein Gradientenfeld ist, hängt das Integral nur von Anfangs- und Endpunkt ab:

$$\int_\gamma f(x) \cdot dx = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = 1 + 1 = 2.$$

Aufgabe G4

Hat

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x,y,z) \\ f_2(x,y,z) \\ f_3(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy + 3x^2 z \\ x^2 + 3y^2 z^2 \\ x^3 + 2y^3 z \end{pmatrix}$$

ein Potential? Wenn ja, dann bestimmen Sie dieses Potential.

Lösung: Zuerst überprüfen wir die Integrabilitätsbedingungen. Also

$$\begin{array}{rcccl} \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) & = & 2x & = & \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) \\ \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) & = & 3x^2 & = & \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y,z) \\ \frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) & = & 6y^2 z & = & \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y,z) \end{array}$$

Weil f auf dem sternförmigen Gebiet $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar ist, hat f also ein Potential Φ. Um das Potential konkret zu bestimmen, gehen wir folgenden Weg. Zunächst muss also gelten

$$\begin{aligned} \Phi_x(x,y,z) = 2xy + 3x^2 z \quad &\Rightarrow \quad \Phi(x,y,z) = x^2 y + x^3 z + C_1(y,z), \\ \Phi_y(x,y,z) = x^2 + 3y^2 z^2 \quad &\Rightarrow \quad \Phi(x,y,z) = x^2 y + y^3 z^2 + C_2(x,z), \\ \Phi_z(x,y,z) = x^3 + 2y^3 z \quad &\Rightarrow \quad \Phi(x,y,z) = x^3 z + y^3 z^2 + C_3(x,y). \end{aligned}$$

Wir setzen $C_1(y,z) = y^3 z^2, C_2(x,z) = x^3 z$ und $C_3(x,y) = x^2 y$. Damit ergibt sich

$$\Phi(x,y) = x^2 y + x^3 z + y^3 z^2.$$

Hausübung

Die Hausaufgabe H1 ist als Präsentationsaufgabe geeignet!

Aufgabe H1 (2+2+2 Punkte)

Wir betrachten das Vektorfeld

$$F(x,y) = (3x + 2y, 2x).$$

(a) Betrachten Sie den durch $Y(t) = (\cos(t),\, 2\sin(t))$ für $t \in [0, \pi/2]$ gegebenen Weg W. Bestimmen Sie das Wegintegral $\int_W F \cdot dY$.

(b) Besitzt F ein Potential φ? Bestimmen Sie es gegebenenfalls.

(c) Berechnen Sie das Wegintegral $\int_W F \cdot dX$ längs eines Weges W, der die Punkte $P_1 = (1,0)$ und $P_2 = (0,2)$ verbindet, unter Verwendung von b).

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned} \int_W F \cdot dY &= \int_0^{\pi/2} (3\cos(t) + 4\sin(t),\, 2\cos(t))(-\sin(t),\, 2\cos(t))^T \, dt \\ &= \int_0^{\pi/2} -3\sin(t)\cos(t) - 4\sin^2(t) + 4\cos^2(t)\, dt \\ &= \int_0^{\pi/2} -3\sin(t)\cos(t) + 4\cos(2t)\, dt \\ &= -(3/2)\sin^2(t) + 2\sin(2t)|_{t=0}^{\pi/2} \\ &= -3/2 \end{aligned}$$

(b) F besitzt ein Potential φ, da $\mathbb{R}^2$ offen und sternförmig ist und da gilt

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2 = \frac{\partial F_2}{\partial x}.$$

Ein Potential φ hat die Form

$$\varphi(x, y) = (3/2)x^2 + 2xy + c.$$

(c)

$$\begin{aligned}\int_W F \cdot dX &= \varphi(0, 2) - \varphi(1, 0) \\ &= -3/2.\end{aligned}$$

Aufgabe H2 (3+1+3+1+3+3 Punkte)

Es sei daran erinnert, dass ein geschlossenes Vektorfeld auf der gelochten Ebene $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ keine Stammfunktion zu besitzen braucht, siehe Beispiel Seite 219 im Skript.

Es sei nun ω eine geschlossenes Vektorfeld auf $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, und zusätzlich gelte $\int_\gamma \omega \cdot dX = 0$ für den Weg

$$\gamma \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) := (\cos t, \sin t)$$

(dies war im eben zitierten Beispiel gerade nicht erfüllt). Es soll gezeigt werden, dass unter diesen stärkeren Voraussetzungen ω eine Stammfunktion besitzt.

(a) Skizzieren Sie $U_1 := \mathbb{R}^2 - \{(r, 0) \colon r \le 0\}$ und $U_2 := \mathbb{R}^2 - \{(0, r) \colon r \le 0\}$. Sind diese Mengen sternförmig bzgl. geeigneter Punkte? Sind sie offen? Zeigen Sie, dass ω auf U_1 (bzw. U_2) eine Stammfunktion F_1 (bzw. G_2) besitzt.

(b) Begründen Sie, dass auch $F_2 \colon U_2 \to \mathbb{R}$, $F_2(x, y) := G_2(x, y) - G_2(1, 0) + F_1(1, 0)$ eine Stammfunktion für ω auf U_2 ist. Es gilt $F_1(1, 0) = F_2(1, 0)$.

(c) Skizzieren Sie die Menge $\Gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x > 0 \text{ oder } y > 0\}$. Zeigen Sie, dass Γ offen und zusammenhängend ist. Zeigen Sie, dass F_1 und F_2 auf Γ übereinstimmen.

(d) Zeigen Sie, dass F_1 und F_2 auf dem offenen Quadranten $Q := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x < 0 \text{ und } y < 0\}$ sich höchstens um eine Konstante unterscheiden, d.h. $F_2|_Q - F_1|_Q = C$ für ein $C \in \mathbb{R}$.

(e) Zeigen Sie, dass

$$\int_{\gamma|_{[\frac{5}{4}\pi, 2\pi]}} \omega \cdot dX = F_1(1, 0) - F_1(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}) \quad \text{und}$$

$$\int_{\gamma|_{[0, \frac{5}{4}\pi]}} \omega \cdot dX = F_2(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}) - F_2(1, 0) \quad \text{gilt.}$$

Schließen Sie, dass $C = 0$ in Teil (d).

(f) Begründen Sie kurz, warum durch $F(x, y) := F_1(x, y)$ für $(x, y) \in U_1$, $F(x, y) := F_2(x, y)$ für $(x, y) \in U_2$ eine Funktion $F \colon \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ wohldefiniert ist, und warum diese eine Stammfunktion zu ω ist.

Lösung:

(a) Die Menge U_1 ist sternförmig bezüglich $(1, 0)$, die Menge U_2 ist sternförmig bezüglich $(0, 1)$. Beide Mengen sind offen in $\mathbb{R}^2$. Nach Satz 11.17 besitzt ω eine Stammfunktion F_1 (bzw. G_2) auf der sternförmigen, offenen Menge U_1 (bzw. U_2).

(b) Nach Lemma 11.14 (a) ist mit G_2 auch $F_2 := G_2 - G_2(1,0) + F_1(1,0)$ eine Stammfunktion für ω auf U_2. Offensichtlich gilt $F_2(1,0) = F_1(1,0)$.

(c) Die Menge Γ ist offen als Vereinigung der offenen Halbebenen $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ und $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$. Man sieht leicht, dass Γ z.B. bezüglich des Punktes $(1,0)$ sternförmig ist, folglich wegzusammenhängend (Skript, S. 219) und somit insbesondere zusammenhängend (Satz 11.12). Da sowohl $F_1|_\Gamma$ als auch $F_2|_\Gamma$ Stammfunktionen zu $\omega|_\Gamma$ sind, wobei $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ eine zusammenhängende, offene Teilmenge (also ein Gebiet) ist, stimmen nach Lemma 11.14 (b) die Funktionen $F_1|_\Gamma$ und $F_2|_\Gamma$ bis auf eine additive Konstante überein, also $F_2|_\Gamma - F_1|_\Gamma = K$ für ein $K \in \mathbb{R}$. Da $F_1(1,0) = F_2(1,0)$, ist $K = 0$.

(d) Der Quadrant Q ist offen, weiter sternförmig bezüglich $(-1,-1)$ und somit zusammenhängend. Wegen Lemma 11.14 (b) gilt also $F_2|_Q - F_1|_Q = C$ für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$.

(e) Das Bild des Weges $\gamma|_{[\frac{5}{4}\pi, 2\pi]}$ ist ganz in U_1 enthalten, und auf U_1 ist F_1 eine Stammfunktion zu ω, also gilt nach Satz 11.10

$$\int_{\gamma|_{[\frac{5}{4}\pi,2\pi]}} \omega \cdot dX = F_1(\gamma(2\pi)) - F_1(\gamma(\tfrac{5}{4}\pi)) = F_1(1,0) - F_1(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}})\,. \tag{1}$$

Weil das Bild von $\gamma|_{[0,\frac{5}{4}\pi]}$ in U_2 enthalten ist, ergibt sich analog

$$\int_{\gamma|_{[0,\frac{5}{4}\pi]}} \omega \cdot dX = F_2(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}) - F_2(1,0)\,. \tag{2}$$

Addieren der Gleichungen (1) und (2) liefert, unter Benutzung der Voraussetzungen der Aufgabe sowie $F_1(1,0) = F_2(1,0)$:

$$0 = \int_\gamma \omega \cdot dX = F_1(1,0) - F_1(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}) + F_2(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}) - F_2(1,0) = C\,.$$

(f) Es ist $U_1 \cap U_2 = \Gamma \cup Q$. Nach Teil (c) und (e) gilt also $F_1|_{U_1\cap U_2} = F_2|_{U_1 \cap U_2}$. Somit ist F durch die angegebenen Formeln wohldefiniert. Beachte, dass $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} = U_1 \cup U_2$; also ist F tatsächlich auf ganz $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ definiert. Die Funktion F ist auf jeder der offenen Mengen U_1 und U_2 (wo sie mit F_1 bzw. F_2 übereinstimmt) stetig differenzierbar und eine Stammfunktion für $\omega|_{U_1}$ bzw. $\omega|_{U_2}$. Daraus folgt, dass F stetig differenzierbar und eine Stammfunktion für ω auf $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} = U_1 \cup U_2$ ist (überlegen Sie sich die Details!).