Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Nada Sissouno
Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/2010
14.01.2010

11. Übungsblatt zur „Analysis II"

Gruppenübung

Aufgabe G1

a) Berechnen Sie die Bogenlängen der folgenden Kurven.
- $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $f(t) = (r\cos t, r\sin t, ct)$, mit $r, c > 0$.
- $g : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$, $g(t) = (\cosh t, \sinh t, t)$.

b) Sei $a < b \in \mathbb{R}$ und $h : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine Lipschitz-stetige Funktion mit Lipschitzkonstante C_L. Zeigen Sie, dass h rektifizierbar und $L(Z, h) \leq C_L \cdot (b-a)$ für eine Zerlegung Z von $[a, b]$ ist.

Lösung:

a) • $f'(t) = (-r\sin t, r\cos t, c)$ und $\|f'(t)\|^2 = r^2 + c^2$. Damit:

$$L(f) = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + c^2}\mathrm{d}t = 2\pi\sqrt{r^2 + c^2}.$$

• $g'(t) = (-r\sinh t, r\cosh t, 1)$ und $\|g'(t)\|^2 = \sinh^2 t + \cosh^2 t + 1 = 2\cosh^2 t$. Damit:

$$L(g) = \int_0^1 \sqrt{2}\cosh t\mathrm{d}t = \sqrt{2}\sinh 1.$$

b) Sei $Z = \{x_0, \ldots, x_n\}$ eine beliebige Zerlegung von $[a, b]$. Dann gilt

$$L(Z, h) = \sum_{k=1}^{n} \|h(x_k) - h(x_{k-1})\|_2 \leq \sum_{k=1}^{n} C_L\|x_k - x_{k-1}\|_2 = C_L \cdot (b-a)$$

Damit ist h rektifizierbar und $L(Z, h) \leq C_L(b-a)$.

Aufgabe G2

Fließt ein konstanter Strom I durch einen unendlich langen Leiter, dann wird das Magnetfeld

$$F(x, y, z) = \frac{I}{2\pi}\left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0\right)$$

aufgebaut, falls die z-Achse in Stromrichtung liegt. Sei der Weg W eine Kreislinie in einer Ebene parallel zur x-y-Ebene mit Radius $r > 0$ und dem Mittelpunkt auf der z-Achse, durchlaufen gegen den Uhrzeigersinn. Parametrisieren Sie den Weg und berechnen Sie das Wegintegral $\int_W F \cdot dX$.

Lösung:
Parameterdarstellung des Weges: $X(t) = (r\cos(t), r\sin(t), z_0)$.

Das ergibt folgendes Wegintegral:

$$\int_W F \cdot dX = \frac{I}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{-r\sin(t)}{r^2}(-r\sin(t)) + \frac{r\cos(t)}{r^2}(r\cos(t))\,dt = \frac{I}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1\,dt = I.$$

Aufgabe G3

Es seien A, B, C drei Punkte in der Ebene. Der Weg W verbinde die drei Punkte entlang der Kanten des Dreiecks mit den Ecken A, B, C. Parametrisieren Sie die Kanten $K(A,B)$, $K(B,C)$, $K(C,A)$ und den Weg W. Berechnen Sie die Kurvenintegrale

$$\int_{K(A,B)}(x,y)\cdot dX,\ \int_{K(B,C)}(x,y)\cdot dX,\ \int_{K(C,A)}(x,y)\cdot dX,\ \int_W (x,y)\cdot dX.$$

Lösung:
Parametrisierung des Dreiecks:

$$\begin{aligned} K(A,B) :& A + t(B-A), && t\in(0,1).\\ K(B,C) :& B + t(C-B), && t\in(0,1).\\ K(C,A) :& C + t(A-C), && t\in(0,1). \end{aligned}$$

mit A, B, $C \in \mathbb{R}^2$. Es ist dann

$$\int_{K(A,B)}(x,y)\cdot dX = \int_0^1 (A + t(B-A))\cdot(B-A)\,dt = A\cdot(B-A) + \frac{1}{2}\|B-A\|^2.$$

Analog für die anderen Kanten. Damit ergibt sich:

$$\int_W (x,y)\cdot dX = \int_{K(A,B)}(x,y)\cdot dX + \int_{K(B,C)}(x,y)\cdot dX + \int_{K(C,A)}(x,y)\cdot dX = 0.$$

Aufgabe G4

a) Zeige, dass eine Menge $A \subset M$ genau dann zusammenhängend ist, wenn jede stetige Funktion

$$f : A \to \{0,1\}$$

konstant ist.

b)
$$A := \{(x, \sin(\frac{1}{x})) \mid x \in (0,\infty)\} \cup (\{0\}\times[-1,1]).$$

Zeige, dass A zusammenhängend aber nicht wegzusammenhängend ist.

Lösung:

a) Für $A = \emptyset$ ist nichts zu zeigen. Sei also $A \neq \emptyset$.
"$\Rightarrow$" Wenn A zusammenhängend ist und f stetig, so ist nach Satz 6.47 $f(A)$ zusammenhängend. $\{0,1\}$ ist nicht zusammenhängend, da $\{0,1\} \subset (-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$ und $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\cap(\frac{1}{2},\frac{3}{2}) = \emptyset$. Also kann $f(A) = \{0,1\}$ nicht sein. Also gilt $f(A) = \{0\}$ oder $f(A) = \{1\}$. In beiden Fällen ist f konstant.
"$\Leftarrow$" Sei A nicht zusammenhängend. Dann gibt es offene $U, V \subset M$ mit

$$A \subset U \cup V,\quad U\cap V = \emptyset,\quad U\cap A \neq \emptyset,\quad V \cap A \neq \emptyset.$$

Wir definieren

$$f : A \to \{0,1\}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in U, \\ 1 & \text{falls } x \in V. \end{cases}$$

Klar ist, dass f nicht konstant ist. Wir zeigen, dass f stetig ist. Sei dazu $x \in A$ und $\varepsilon > 0$.
1. Fall: $x \in U$. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass $B_\delta(x) \subset U$ (Kugel um x mit Radius δ). Für alle $t \in B_\delta(x) \cap A$ gilt dann $f(t) = 0 = f(x)$, also insbesondere $|f(t) - f(x)| \le \varepsilon$.
2. Fall: $x \in V$. Geht genauso.

b) 1. A ist zusammenhängend:
Wir zeigen zuerst, dass $\{(x, \sin(\frac{1}{x})) \mid x \in (0,\infty)\}$ wegzusammenhängend ist. Seien dazu $(x, \sin\frac{1}{x}), (y, \sin\frac{1}{y}) \in \{(x, \sin(\frac{1}{x})) \mid x \in (0,\infty)\}$. Dann ist $\phi(t) := ((1-t)x + ty, \sin\frac{1}{(1-t)x+ty})$ ein stetiger Weg von $(x, \sin\frac{1}{x})$ nach $(y, \sin\frac{1}{y})$.
Sei nun $f : A \to \{0,1\}$ stetig. Dann ist f konstant (oBdA $= 0$) auf $\{(x, \sin(\frac{1}{x})) \mid x \in (0,\infty)\}$. Sei $(0, a) \in A$, also $a \in [-1,1]$. Es gilt

$$\sin\frac{1}{\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{4}}} = 1 \quad \text{und} \quad \sin\frac{1}{\frac{1}{2n\pi+\frac{3\pi}{4}}} = -1.$$

Also gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi_n \in [\frac{1}{2n\pi+\frac{3\pi}{4}}, \frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{4}}]$ mit $\sin\frac{1}{\xi_n} = a$. Außerdem gilt $\{(x, \sin(\frac{1}{x})) \mid x \in (0,\infty)\} \ni (\xi_n, a) \xrightarrow{n\to\infty} (0,a)$. Weil f stetig ist, gilt $f(0,a) = \lim_{n\to\infty} f(\xi_n, a) = 0$. Also ist f auf ganz A konstant und nach Aufgabenteil a) ist A zusammenhängend.
2. A ist nicht wegzusammenhängend: Es gilt: $(0,1) \in A$ und $(\frac{1}{\pi}, 0) \in A$. Angenommen es gibt einen stetigen Weg $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ mit $\phi(t) \in A$ für alle t und $\phi(0) = (0,1)$ und $\phi(1) = (\frac{1}{\pi}, 0)$. Dann müssen auch die Komponentenfunktionen ϕ_1 und ϕ_2 stetig sein. Nach dem Zwischenwertsatz muss es folglich $\xi_k \in [0, \xi_{k-1}]$ geben mit $\phi_1(\xi_k) = \frac{1}{k\pi+\frac{\pi}{4}}$. Da $(\phi_1(\xi_k), \phi_2(\xi_k)) \in A$ ist, muss $\phi_2(\xi_k) = \sin(\frac{1}{\phi_1(\xi_k)}) = \sin(k\pi + \frac{\pi}{4}) = (-1)^k$ für alle k gelten. Da (ξ_k) monoton fällt und beschränkt ist, konvergiert diese Folge gegen ein $\xi \in [0,1]$. Da ϕ stetig ist, folgt

$$\left(\frac{1}{k\pi + \frac{\pi}{4}}, (-1)^k\right) = \phi(\xi_k) \xrightarrow{k\to\infty} \phi(\xi).$$

Das ist ein Widerspruch, da die linke Folge keinesfalls gegen irgendetwas konvergiert.

Hausübung

Die Hausaufgaben H1und H2 sind als Präsentationsaufgaben geeignet!

Aufgabe H1 (4+3+3 Punkte)

Wir betrachten einen Weg der Gestalt

$$\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(\phi) = r(\phi) \cdot (\cos\phi, \sin\phi),$$

wobei $r : [\alpha, \beta] \to [0, \infty)$ stetig differenzierbar ist.

a) Begründen Sie, dass γ rektifizierbar ist und zeigen Sie

$$L(\gamma) = \int_\alpha^\beta \sqrt{(r(\phi))^2 + (r'(\phi))^2}\, d\phi.$$

b) Im Falle

$$r : [-\pi, \pi] \to [0, \infty), \quad r(\phi) := 1 + \cos\phi$$

nennt man die zugehörige Kurve Kardioide.
Zeigen Sie, dass die Kardioide eine Jordankurve ist.

c) Begründen Sie, dass die Kardioide eine Kurvenlänge besitzt und berechnen Sie diese.

Lösung:

(a) Der Weg γ ist stetig differenzierbar und nach Satz 11.5 daher rektifizierbar. Die Produktregel der Differentialrechnung liefert

$$\gamma'(\phi) = r'(\phi) \cdot (\cos\phi, \sin\phi) + r(\phi) \cdot (-\sin\phi, \cos\phi).$$

Weil $(\cos\phi, \sin\phi)$ und $(-\sin\phi, \cos\phi)$ zueinander orthogonale Einheitsvektoren sind, erhalten wir

$$\|\gamma'(\phi)\|_2 = \sqrt{(r'(\phi))^2 + (r(\phi))^2}.$$

Setzt man dies in die Formel aus Satz 11.5 ein, so folgt die Behauptung.

(b) Die Abbildung

$$(\rho, \phi) \mapsto \rho(\cos\phi, \sin\phi) : \ (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

ist injektiv. Da $r(\phi) > 0$ für $\phi \in (-\pi, \pi)$ ist, ist somit γ auf $(-\pi, \pi)$ injektiv.
Also gilt für $s < t$ mit $\gamma(s) = \gamma(t)$ notwendiger Weise $s = -\pi$ oder $t = \pi$. Nun ist aber $\gamma(-\pi) = \gamma(\pi) = 0$, während $\gamma(\phi) \neq (0, 0)$ für $\phi \in (-\pi, \pi)$. Somit ist nur noch $s = -\pi$ und $t = \pi$ möglich. Wir haben gezeigt, dass γ eine Jordankurve ist, das heißt die Kardioide ist ein Jordanweg.

(c) Nach 1. und 2. ist $\Gamma := \mathit{Bild}\,\gamma$ ein rektifizierbarer Jordanweg. Nach Satz 11.5 und 11.6 ist Γ die Weglänge $L(\gamma)$ zugeordnet. Da $r'(\phi) = -\sin\phi$ ist, ist

$$r(\phi)^2 + r'(\phi)^2 = 1 + 2\cos\phi + \cos^2\phi + \sin^2\phi = 2(1 + \cos\phi) = 4\cos^2\frac{\phi}{2}.$$

Somit erhält man

$$L(\gamma) = \int_{-\pi}^{\pi} 2|\cos\frac{\phi}{2}|d\phi = \int_{-\pi}^{\pi} 2\cos\frac{\phi}{2}d\phi = 8.$$

Aufgabe H2 (3 Punkte)

In einer Junggesellenwohnung, deren Fußboden wir uns als die Halbebene

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$$

vorstellen, hat sich vor der Wand $x = 0$ eine Staubschicht angehäuft, deren Höhe $h(x, y) = 2e^{-x}$ beträgt (in Millimetern, an der Stelle $(x, y) \in H$, wobei x, y in Metern). Ein junger Mann bewegt den Staubsauger während einer Sekunde geradlinig auf einer Strecke Γ vom Punkt $(2, 0)$ nach $(1, 1)$. Zur Zeit $t \in [0, 1]$ befinde sich die Düse des Saugers an der Stelle

$$\gamma(t) := (2 - t^2, t^2).$$

Das momentan pro zurückgelegter Wegstrecke beim Passieren des Punktes $(x, y) \in \Gamma$ aufgenommene Volumen Staub betrage $f(x, y) = 0,2 \cdot h(x, y)$ (in Liter pro Meter). Berechnen Sie das Gesamtvolumen Staub (in Liter), das längs der Strecke Γ eingesaugt wird.

Lösung:
Das gesuchte Volumen ist

$$V = \int_\gamma f = \int_0^1 f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|dt = 0,4\int_0^1 e^{-(2-t^2)}\sqrt{2}\cdot 2t\,dt = 0,4\sqrt{2}e^{-2}[e^{t^2}]_0^1 = 0,4\sqrt{2}e^{-2}(e-1)$$

(was c.a. 0,2 Liter sind.)

Aufgabe H3 (5+1+1+2 Punkte)

Es sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ mit $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$ ein zweimal stetig differenzierbarer Weg derart, dass $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in [a,b]$.

a) Zeigen Sie, dass die Weglängenfunktion $s : [a,b] \to [0, L(\gamma)]$ eine streng monoton wachsende, zweimal stetig differenzierbare Bijektion von $[a,b]$ auf $[0, L(\gamma)]$ ist mit zweimal stetig differenzierbarer Umkehrfunktion $s^{-1} : [0, L(\gamma)] \to [a,b]$.

b) Zeigen Sie, dass der "durch Umparametrisieren der Weglänge"entstandene Weg

$$\nu : [0, L(\gamma)] \to \mathbb{R}^n, \quad \nu(r) := \gamma(s^{-1}(r))$$

folgende Eigenschaften besitzt:

(i) $\|\nu'(r)\|_2 = 1$ für alle $r \in [0, L(\gamma)]$,

(ii) $L(\nu|_{[0,r]}) = r$ für alle $r \in (0, L(\gamma)]$,

(iii) Für jedes $r \in [0, L(\gamma)]$ sind die Vektoren $\nu'(r)$ und $\nu''(r)$ zueinander orthogonal.

Lösung:

a) Nach Satz 11.5 ist s einmal stetig differenzierbar, mit Ableitung

$$s'(t) = \|\gamma'(t)\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n (\gamma_k'(x))^2}.$$

Wegen $\gamma'(t) \neq 0$ ist stets $\sum_{k=1}^n (\gamma_k'(x))^2 > 0$. Da $\sqrt{\bullet}$ auf $(0,\infty)$ stetig differenzierbar ist und weiter $\sum_{k=1}^n (\gamma_k')^2$ stetig differenzierbar ist, ist s' als Komposition dieser Abbildungen stetig differenzierbar. Also ist s zweimal stetig differenzierbar.

Da $s'(t) = \|\gamma'(t)\|_2 > 0$, ist s streng monoton wachsend, mit stetig differenzierbarer Umkehrfunktion, deren Ableitung bekanntlich durch $(s^{-1})'(r) = \frac{1}{s'(s^{-1}(r))}$ gegeben ist.

Aufgrund dieser Formel ist $(s^{-1})'$ stetig differenzierbar, also s^{-1} tatsächlich zweimal stetig differenzierbar.

b) (i) Es ist $\nu'(r) = (\gamma \circ s^{-1})'(r) = \gamma'(s^{-1}(r)) \cdot (s^{-1})'(r)$ nach der Kettenregel, wobei $(s^{-1})'(r) = \frac{1}{s'(s^{-1}(r))} = \frac{1}{\|\gamma'(s^{-1}(r))\|_2}$. Daher $\|\nu'(r)\| = \frac{\|\gamma'(s^{-1}(r))\|_2}{\|\gamma'(s^{-1}(r))\|_2} = 1$.

(ii) Satz 11.5 und Aufgabenteil (b) zeigt:

$$L(\nu|_{[0,r]}) = \int_0^r \|\nu'(t)\|_2 dt = \int_0^r dt = r.$$

(iii) Nach Aufgabenteil (i) ist $1 = \|\nu'(r)\|_2^2 = \langle \nu'(r), \nu'(r)\rangle = \sum_{k=1}^n (\nu_k'(r))^2$, für alle $r \in [0, L(\gamma)]$. Differenzieren nach r liefert $0 = 2\sum_{k=1}^n \nu_k'(r)\nu_k''(r) = 2\langle \nu'(r), \nu''(r)\rangle$. Also sind $\nu'(r)$ und $\nu''(r)$ tatsächlich orthogonal.