Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Nada Sissouno

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2009/2010
17.12.2009

10. Übungsblatt zur „Analysis II“

Gruppenübung

Aufgabe G1

Gegeben sei die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = \sin^2 y + x^3 - 1$.

a) Für welche (x_0, y_0) mit $g(x_0, y_0) = 0$ kann man die Gleichung $g(x,y) = 0$ lokal nach y auflösen, d.h. für welche (x_0, y_0) gibt es eine geeignete Umgebung von x_0, so dass in dieser Umgebung aus $g(x,y) = 0$ die Existenz einer differenzierbaren Funktion f mit $y = f(x)$ folgt?

b) Kann man für $(\sqrt[3]{0.5}, \pi/4)$ die Gleichung $g(x,y) = 0$ lokal nach y auflösen?

c) Berechnen Sie $f'(x_0)$, ohne $f(x_0)$ explizit zu bestimmen.

d) Berechnen Sie $f'(\sqrt[3]{0.5})$.

Lösung:

(a) Nach dem Satz über implizite Funktionen ist $g(x,y) = 0$ für $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ mit $g(x_0, y_0) = 0$ und $g_y(x_0, y_0) \neq 0$ lokal nach y auflösbar.

Weiterhin gilt $g_y(x,y) = 2\sin(y)\cos(y) \neq 0 \Leftrightarrow y \neq \frac{k}{2}\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Also existiert für (x_0, y_0), $y_0 \neq \frac{k}{2}\pi, k \in \mathbb{Z}$ mit $g(x_0, y_0) = 0$ eine Umgebung U von x_0 und eine differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ mit $y_0 = f(x_0)$ und $g(x, f(x)) = 0$, $x \in U$.

(b) Für $(x_0, y_0) = (\sqrt[3]{0.5}, \pi/4)$:
$g(x_0, y_0) = 0$ und $g_y(x_0, y_0) = 2\sin(\pi/4)\cos(\pi/4) = 1$. Also ist $g(x,y) = 0$ in (x_0, y_0) lokal nach y auflösbar.

(c) Es gilt

$$f'(x) = -\frac{g_x(x, f(x))}{g_y(x, f(x))},$$

also

$$f'(x_0) = -\frac{3x_0^2}{2\cos(y_0)\sin(y_0)}.$$

(d) $f'(x_0) = -3(\sqrt[3]{0.5})^2$.

Aufgabe G2

Bestimmen Sie alle globalen und lokalen Extrema der Funktion

$$f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 1\} \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto (2x^2 + 1)(y^2 + 1).$$

Lösung:

Vorgehensweise: Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$. Dann ist die zulässige Menge $Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) \leq 0\}$, deren Inneres $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) < 0\}$ und ihr Rand $\partial Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0\}$. Zunächst sind alle Punkte im Inneren von Z zu bestimmen, die die notwendige Bedingung $D(f)(x, y) = 0$ erfüllen, sowie die Punkte auf dem Rand der zulässigen Menge, für die die Bedingung $D(f)(x, y) = \lambda D(g)(x, y)$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt. Die Punkte mit dem größten bzw. kleinstem Funktionswert sind globale Extrempunkte. Für die Bestimmung der lokalen Extrema ist jeder der Punkte gesondert zu betrachten, ob er die Bedingung für ein lokales Extremum erfüllt.

Es gilt

$$D(f)(x, y) = (4x(y^2 + 1),\, 2y(2x^2 + 1)).$$

Da sowohl $y^2 + 1 \neq 0$ als auch $2x^2 + 1 \neq 0$ gilt, erfüllt nur der Punkt $p_0 = (0, 0)$ die Bedingung $D(f)(x, y) = 0$. Außerdem liegt er im Inneren der zulässigen Menge Z.

Weiter gilt

$$D(g)(x, y) = (2x,\, 2y).$$

Es sind nun Punkte $(x, y) \in \partial Z$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gesucht, sodass

$$D(f)(x, y) = (4x(y^2 + 1),\, 2y(2x^2 + 1)) = \lambda(2x, 2y) = \lambda D(g)(x, y)$$

gilt.

Ist $x = 0$, dann folgt

$$(0, 2y) = \lambda(0, 2y),$$

das heißt die Bedingung ist für $\lambda = 1$ erfüllt. Da nur Randpunkte interessant sind, ergeben sich die Punkte $p_1 = (0, 1)$ und $p_2 = (0, -1)$.

Ist $y = 0$, dann folgt

$$(4x, 0) = \lambda(2x, 0),$$

das heißt die Bedingung ist für $\lambda = 2$ erfüllt. Da nur Randpunkte interessant sind, ergeben sich die Punkte $p_3 = (1, 0)$ und $p_4 = (-1, 0)$.

Gilt $x, y \neq 0$, dann ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2(y^2 + 1) &= \lambda \\ 2x^2 + 1 &= \lambda. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} && 2(y^2 + 1) &= 2x^2 + 1 \\ \Leftrightarrow && x^2 &= y^2 + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Einsetzen in die Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$ ergibt

$$\begin{aligned} && y^2 + \frac{1}{2} + y^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow && y &= \pm\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Daraus folgt $x^2 = \frac{3}{4}$ und es ergeben sich die kritischen Punkte $p_5 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$, $p_6 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$, $p_7 = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ und $p_8 = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$.
Die Funktionswerte der kritischen Punkte sind

$$\begin{aligned} f(p_0) &= 1, \\ f(p_1) = f(p_2) &= 2, \\ f(p_3) = f(p_4) &= 3, \\ f(p_5) = f(p_6) = f(p_7) = f(p_8) &= \frac{25}{8} > 3. \end{aligned}$$

Daher ist p_0 ein globaler Minimalpunkt mit Zielfunktionswert 1 und p_5, p_6, p_7 und p_8 sind globale Maximalpunkte mit Zielfunktionswert $\frac{25}{8}$. Da der Rand der zulässigen Menge ein Kreis ist, die Punkte $p_1, \ldots, p_8$ auf diesem liegen und die Punkte $p_5, \ldots, p_8$ Maximalpunkte sind, sind die Punkte $p_1, \ldots, p_4$ Minimalpunkte, wenn nur der Kreis als zulässige Menge betrachtet wird. Allerdings müssen sie genauer untersucht werden, um zu entscheiden, ob sie auch Minimalpunkte bezüglich der gesamten zulässigen Menge sind. Sei $\delta \in (0, 1)$. Dann gilt $p_i - \delta p_i \in Z$ für alle $i \in \{1, \ldots, 4\}$. Weiter gilt

$$\begin{aligned} f(p_1) - f(p_1 - \delta p_1) &= 2 - (\underbrace{(1-\delta)^2}_{<1} + 1) > 0, \\ f(p_2) - f(p_2 - \delta p_2) &= 2 - (\underbrace{(-1+\delta)^2}_{<1} + 1) > 0, \\ f(p_3) - f(p_3 - \delta p_3) &= 3 - (\underbrace{2(1-\delta)^2}_{<2} + 1) > 0, \\ f(p_4) - f(p_4 - \delta p_4) &= 3 - (\underbrace{2(-1+\delta)^2}_{<2} + 1) > 0. \end{aligned}$$

Folglich ist keiner der Punkte $p_1, \ldots, p_4$ ein Minimalpunkt. Daher gibt es außer den globalen Extrema keine weiteren lokalen Extrema. Zur Anschauung siehe Abbildung 1 .

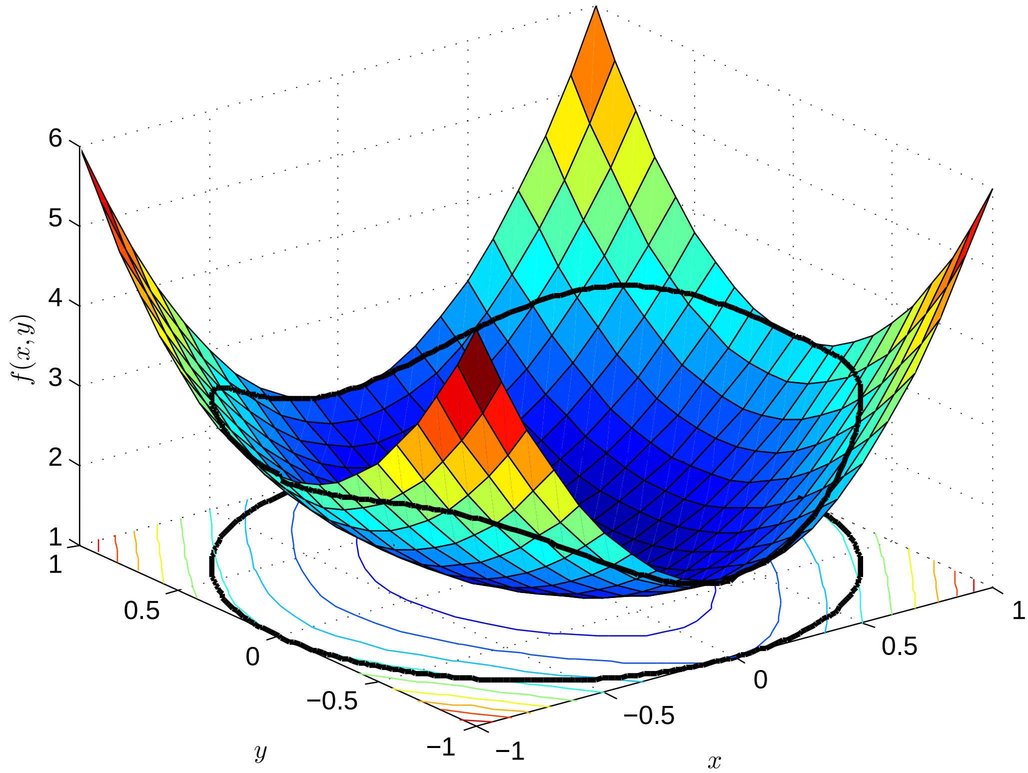

Abbildung 1: Die Funktion f und ihre Höhenlinien. Die dicke schwarze Linie stellt den Rand der zulässigen Menge bzw. dessen Projektion auf den Graphen dar.

Hausübung

Die Hausaufgaben H2 und H3 sind als Präsentationsaufgaben geeignet!

Aufgabe H1 (6 Punkte)

Ist die Gleichung

$$x^y - y^x = 0$$

in der Nähe von (e,e) bzw. $(2,4)$ nach x bzw. y auflösbar?

Anleitung für den Fall (e,e)**:** Studieren Sie die Funktion

$$g : (x,y) \mapsto y \log x - x \log y$$

auf Kreisen

$$K_r := \{(x,y) \mid (x,y) = (e,e) + r(\cos t, \sin t)\}$$

für $r > 0$ und achten Sie auf das Vorzeichen.

Lösung:

Wir setzen $f(x,y) := x^y - y^x$. Dann gilt $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \ln x \cdot x^y - xy^{x-1}$. Somit hat man $\frac{\partial}{\partial y} f(2,4) = 8(2\ln 2 - 1) \neq 0$. Ausserdem gilt $2^4 - 4^2 = 0$. Somit lässt sich f in $(2,4)$ lokal nach y auflösen. Analog zeigt man, dass man auch lokal nach x auflösen kann.

Sei nun

$$h(r,t) := (e,e) + r(\cos t, \sin t)$$

Dann gilt

$$g(h(r, \frac{\pi}{2})) = g(e, e+r) = (e+r) - e\log(e+r) \;\text{ und }\; g(h(r,\pi)) = g(e-r, e) = -(e-r) + e\log(e-r).$$

Es gilt $\partial_x(x - e\log x) = 1 - \frac{e}{x}$. Hieran sieht man leicht, dass

$$x - e\log x \geq e - e\log e = 0$$

somit folgt $g(h(r, \frac{\pi}{2})) > 0$ und $g(h(r, \pi)) < 0$.
Nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein $t \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ mit $g(h(r,t)) = 0$. Für $(x,y) = h(r,t)$ gilt $y\log x = x\log y$, also $x^y = y^x$.
Also findet man in jeder Umgebung von (e,e) Punkte (x,y) mit $x \neq y$ und $x^y = y^x$. Außerdem gilt sowieso $x^x = x^x$. Also kann es keine Auflösung nach y (und auch keine nach x) geben.

Aufgabe H2 (6 Punkte)

Es seien $p, q \in (0,\infty)$ fest gewählt mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Bestimmen Sie das Minimum von

$$f : (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x,y) := xy = 1.$$

Folgeren Sie hieraus auch $\frac{1}{p}u^p + \frac{1}{q}v^q \geq uv$.

Lösung:
Ist (x,y) ein Minimum, so hat man

$$\lambda y = x^{p-1}, \quad \lambda x = y^{q-1}, \quad xy = 1 \;\Rightarrow\; x, y \neq 0.$$

Durch Auflösen erhält man leicht $x = y = 1$. Also ist $(1,1)$ der einzige kritische Punkt.
Weiterhin gilt, falls $x \to \infty$, dass $f(x,y) \to \infty$ und für $x \to 0$ folgt aus $xy = 1$, dass $y \to \infty$ also $f(x,y) \to \infty$.
Analog für y. Also liegt in $(1,1)$ ein Minimum.
Sei nun

$$x := \frac{u}{(uv)^{\frac{1}{p}}}, \quad y := \frac{v}{(uv)^{\frac{1}{q}}}.$$

Dann gilt $xy = 1$ und wie eben berechnet $\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q \geq 1$. Umformen liefert $\frac{1}{p}u^p + \frac{1}{q}v^q \geq uv$.

Aufgabe H3 (6 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 2$. Verwenden Sie die Lagrange'schen Multiplikatoren, um ein mögliches Maximum der Funktion

$$f(x_1, ..., x_n) := \sin(x_1) + ... + \sin(x_n)$$

für $x_1 + ... + x_n = 2\pi$, $0 \leq x_j \leq \pi$, $j = 1, ..., n$ zu bestimmen. Ausnahmsweise soll hier eine anschauliche Begründung, dass das Maximum nicht in einem Punkt des Randes von $[0,\pi]^n$ angenommen wird, genügen. Deuten Sie hierzu $f(x_1, ..., x_n)$ geometrisch.

Hinweis: Betrachten Sie die Punkte $e^{i\sum_{j=1}^{k} x_j}$, $k = 1, \ldots, n$ in $\mathbb{C}$.

Lösung:
Ist x ein Maximum, so muß für alle j gelten

$$\lambda = \lambda \frac{\partial \sum x_j}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} = \cos(x_j).$$

Also gilt $\cos x_k = \cos x_j$ für $k, j \in \{1, ..., n\}$. Weil der cos auf $(0,\pi)$ streng monoton ist, folgt $x_k = x_j$ für $k = 1, ..., n$.
Aus der Nebenbedingung erhält man

$$2\pi = \sum_{j=1}^{n} x_j = nx_1$$

also $x_j = \frac{2\pi}{n}$.

Da die Menge

$$\{(x_1, ..., x_n) \mid \sum_{j=1}^{n} x_j = 2\pi,\ x_j \in [0, \pi]\}.$$

kompakt ist, muss die stetige Funktion f auf ihr ein Maximum annehmen. Der einzige kritische Punkt in der Menge

$$\{(x_1, ..., x_n) \mid \sum_{j=1}^{n} x_j = 2\pi,\ x_j \in (0, \pi)\}$$

ist $(\frac{2\pi}{n}, ..., \frac{2\pi}{n})$. Es muss nun ausgeschlossen werden, dass es aus $\partial[0, \pi]^n$ einen größeren Wert gibt.

Wir geben aber nur eine anschauliche Begründung:
Der Wert $f(x_1, ..., x_n)$ mit $\sum x_j = 2\pi$ ist 2mal der Flächeninhalt des n-Ecks mit den Ecken $e^{i\sum_{j=1}^{k} x_j}$ mit $k = 1, ..., n$. Dass das regelmäßige n-Eck die größte Fläche hat, ist einzusehen. Der Beweis hierfür ist zwar nicht unbedingt schwierig, aber technisch. Er kann zum Beispiel per Induktion nach n und mit Hilfe der Tatsache, dass die Funktion $x \sin \frac{2\pi}{x}$ monoton ist geführt werden.