Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Nada Sissouno

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2009/2010
17.12.2009

9. Tutorium zur „Analysis II“

Extrema unter Nebenbedingungen

Aufgabe T1

Man bestimme denjenigen Punkt auf der Ebene $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x + y\}$, der vom Punkt $(1, 0, 0)$ den kleinsten Euklidischen Abstand hat.

Lösung:

Statt des Euklidischen Abstands minimieren wir sein Quadrat, d.h. die Funktion

$$f(x, y, z) = \|(x, y, z) - (1, 0, 0)\|^2 = (x - 1)^2 + y^2 + z^2.$$

Offenbar besitzt diese Funktion ihr Minimum 0 an der Stelle $(1, 0, 0)$; dieser Punkt liegt jedoch nicht auf der Ebene E, d.h. er genügt nicht der *Nebenbedingung*

$$g(x, y, z) = x + y - z = 0.$$

Um das Minimum von f unter dieser Nebenbedingung zu finden, setzen wir $z = x + y$ in f ein und erhalten eine neue Funktion zweier Veränderlicher

$$\varphi(x, y) = (x - 1)^2 + y^2 = (x = y)^2 \quad \text{auf } \mathbb{R}^2.$$

Die extremwertverdächtigen Stellen von φ finden wir durch Nullsetzen der partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2(x - 1) + 2(x + y) = 4x + 2y - 2 = 0,$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2y + 2(x + y) = 2x + 4y = 0.$$

Die einzige Lösung dieses Szstems ist $x = 2/3$, $y = -1/3$. Für z ergibt sich aus $z = x + y$ dann $z = 1/3$.

Man kann sich leicht klar machen, dass die Aufgabe eine Lösung besitzen *muss*; also ist $(2/3, -1/3, 1/3)$ der Punkt, in dem das Minimum realisiert wird. Der minimale Abstand ist $\sqrt{f(2/3, -1/3, 1/3)} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Wir konnten diese Aufgabe leicht auf eine “gewöhnliche” Extremwertaufgabe zurückführen, indem wir die Nebenbedingung in die zu minimierende Funktion eingesetzt haben. Bei der folgenden Aufgabe wäre dieses Vorgehen wesentlich umständlicher.

Aufgabe T2

Es sollen diejenigen Punkte der Ellipse

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1 \text{ mit } a > 0 \text{ und } ac > b^2\}$$

bestimmt werden, welche von ihrem Mittelpunkt $(0, 0)$ maximalen oder minimalen Abstand haben.

Wir verschieben die Lösung dieser Aufgabe und überlegen uns zunächst einen Satz, der uns dieses umständliche Einsetzen der Nebenbedingung erspart.

Satz. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $g : U \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, die im Punkt a ein lokales Maximum (Minimum) unter der Nebenbedingung $g = 0$ besitzt (d.h. es gibt eine Umgebung $V \subset U$ von a so, dass*

$$f(a) \geq f(x) \quad \textit{bzw.} \quad f(a) \leq f(x) \qquad \textit{für alle } x \in V \cap E).$$

Dann gibt es ein $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ so, dass

$$(\operatorname{grad} f)(a) = \lambda_0 (\operatorname{grad} g)(a). \tag{Lagrange}$$

Die Zahl λ_0 heißt *Lagrange'scher Multiplikator*. Ein ähnlicher Satz gilt bei Vorliegen mehrerer Nebenbedingungen (vgl. etwa Barner/Flohr, Ana II, S. 186ff). Der Satz sagt aus, dass es ein λ_0 gibt, so, dass der Punkt a ein extremwertverdächtiger Punkt der Funktion $h = f - \lambda_0 g : U \to \mathbb{R}$ ist:

Es ist ja $\frac{\partial h}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} - \lambda_0 \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0$ für alle i genau dann, wenn (Lagrange) gilt. Fassen wir h nicht nur als Funktion von x, sondern von x und λ auf:

$$\tilde{h}(x, \lambda) = f(x) - \lambda g(x) \ : \ U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

so ist (a, λ_0) ein extremwertverdächtiger Punkt von $\tilde{h}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{h}}{\partial x_1} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} - \lambda_0 \frac{\partial g}{\partial x_1} = 0 \\
\frac{\partial \tilde{h}}{\partial x_2} &= \frac{\partial f}{\partial x_2} - \lambda_0 \frac{\partial g}{\partial x_2} = 0 \\
&\vdots \\
\frac{\partial \tilde{h}}{\partial x_n} &= \frac{\partial f}{\partial x_n} - \lambda_0 \frac{\partial g}{\partial x_n} = 0 \\
\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \lambda} &= -g = 0,
\end{aligned}$$

also $(\operatorname{grad} \tilde{h})(a) = \lambda (\operatorname{grad} g)(a)$ und $g(a) = 0$.

Lösen Sie nun die Aufgabe 2.

Lösung:

Wir minimieren das Abstandsquadrat, d.h. die Funktion

$$f(x, y) = \|(x, y) - (0, 0)\|^2 = x^2 + y^2$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 - 1 = 0.$$

Wir suchen dazu die extremwertverdächtigen Stellen der Funktion

$$h(x,y) = f(x,y) - \lambda g(x,y) = x^2 + y^2 - \lambda(ax^2 + 2bxy + cy^2 - 1),$$

welche zugleich der Nebenbedingung genügen. Es ist also

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 2x - 2\lambda ax - 2\lambda by = 0$$
$$\frac{\partial h}{\partial y} = 2y - 2\lambda bx - 2\lambda cy = 0$$

bzw.

$$(1-\lambda a)x - \lambda by = 0$$
$$-\lambda bx = (1-\lambda c)y = 0$$

Der Punkt $(0,0)$ liegt nicht auf E. Das System muss also weitere nichttriviale Lösungen besitzen. Dies geht nur, wenn

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda a & -\lambda b \\ -\lambda b & 1-\lambda c \end{pmatrix} = (1-\lambda a)(1-\lambda c) - \lambda^2 b^2 = 0$$

bzw. wenn

$$\lambda^2(ac - b^2) - \lambda(a+c) + 1 = 0.$$

Diese Gleichung besitzt genau zwei reelle Nullstellen. Dies sieht man am einfachsten, wenn man $\lambda = \frac{1}{\mu}$ setzt und die Gleichung

$$\mu^2 - (a+c)\mu + (ac - b^2) = 0$$

betrachtet. Dann ist

$$\mu_{1,2} = \frac{a+c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a+c}{2}\right)^2 - ac + b^2} = \frac{a+c}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\frac{(a-c)^2 + 4b^2}{4}}_{>0 \text{ falls } a \neq c \text{ und } b \neq 0}}$$

Diese kann man berechnen, und für die λ_1, λ_2 das System lösen. Wir überlegen uns dies nur für $a \neq c$, $b = 0$. Dann ist $\lambda = \frac{1}{a}$ bzw. $\lambda = \frac{1}{c}$ und das System reduziert sich jeweils auf

$$\left(1 - \frac{c}{a}\right) y = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \left(1 - \frac{a}{c}\right) x = 0.$$

Es muss also wegen $a \neq c$ $y = 0$ bzw. $x = 0$ gelten. Die Lösungsmengen sind also

$$\{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} \qquad \text{bzw.} \qquad \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}.$$

Von jeder dieser Lösungsmengen erfüllen je genau 2 Punkte die Nebenbedingung

$$ax^2 + cy^2 = 1.$$

Wir haben also 4 extremwertverdächtige Punkte:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a}}, 0\right), \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{a}}, 0\right), \quad \left(0, \frac{1}{\sqrt{c}}\right), \quad \left(0, -\frac{1}{\sqrt{c}}\right)$$

Aufgabe T3

Beweisen Sie den angegebenen Satz unter Benutzung des Satzes über implizite Funktionen.

Lösung:

Da $(\operatorname{grad} g)(a) \neq 0$ ist, ist wenigstens eine Komponente des Vektors ungleich 0, etwa die letzte

$$\frac{\partial g}{\partial x_n}(a) \neq 0$$

(sonst nummerieren wir um). Sei $a = (\underbrace{a_1, \ldots, a_{n-1}}_{=:a'}, a_n)$.

Nach dem Satz über implizite Funktionen (angewandt auf die Funktion g) gibt es eine offene Umgebung $U' \subset \mathbb{R}^{n-1}$ von a' und eine offene Umgebung U_n von a_n sowie eine stetig differenzierbare Funktion

$$h : U' \to U_n$$

so, dass

$$E \cap (U \times U_n) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in U' \times U_n : x_n = h(x_1, \ldots, x_{n-1})\}.$$

Auf U' ist also

$$g(x_1, \ldots, x_{n-1}, h(x_1, \ldots, x_{n-1})) = 0.$$

Partielles Ableiten liefert mit Kettenregel für alle $i = 1, \ldots, n-1$:

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(a) + \frac{\partial g}{\partial x_n}(a)\frac{\partial h}{\partial x_i}(a') = 0. \tag{1}$$

Wir betrachten die Funktion

$$F(x_1, \ldots, x_{n-1}) = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, h(x_1, \ldots, x_{n-1})) : U' \to \mathbb{R}.$$

Da f auf E in a ein lokales Extremum besitzt, besitzt F in a' ein lokales Extremum. Alle partiellen Ableitungen von F in a' verschwinden daher:

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a') = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\frac{\partial h}{\partial x_i}(a'). \tag{2}$$

Sei

$$\lambda := \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\left(\frac{\partial g}{\partial x_n}(a)\right)^{-1} \tag{3}$$

(dies ist wegen $\frac{\partial g}{\partial x_n}(a) \neq 0$ wohldefiniert). Aus (1) und (2) folgt dann für alle $i = 1, \ldots, n-1$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) &\overset{(2)}{=} -\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\frac{\partial h}{\partial x_i}(a') \\
&= -\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\left(\frac{\partial g}{\partial x_n}(a)\right)^{-1}\frac{\partial g}{\partial x_n}(a)\frac{\partial h}{\partial x_i}(a') \\
&= -\lambda\frac{\partial g}{\partial x_n}(a)\frac{\partial h}{\partial x_i}(a') \overset{(1)}{=} \lambda\frac{\partial g}{\partial x_i}(a).
\end{aligned}$$

Dies gilt wegen (3) auch für $i = n$. Also ist

$$(\operatorname{grad} f)(a) = \lambda(\operatorname{grad} g)(a).$$

Aufgabe T4

Man bestimme die lokalen und globalen Extrema der Funktion $f(x,y) := xy^2$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$ mit der Methode der Langrangemultiplikatoren.

Anmerkung: In diesem Fall kann man diese Aufgabe viel einfacher lösen, indem man in $f(x,y) = xy^2$ etwa y^2 gemäß der Nebenbedingung durch $1 - x^2$ ersetzt und nun die Stellen "freier" Extrema der Funktion

$$\varphi(x) := x - x^3 \qquad (-1 \le x \le 1)$$

ermittelt.

Lösung:

Offenbar genügt es wieder, das Lagrangesche Gleichungssystem zu untersuchen, das durch Nullsetzen der partiellen Ableitungen von

$$F(x,y,\lambda) := xy^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

entsteht:

$$\begin{aligned} y^2 + 2\lambda x &= 0 \\ 2xy + 2\lambda y &= 0 \\ x^2 + y^2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Multiplikation der ersten Gleichung mit y und der zweiten mit x liefert

$$y^3 + 2\lambda xy = 0, \qquad 2x^2y + 2\lambda xy = 0,$$

und daher muss

$$y^3 = 2x^2y$$

sein. Ist $y \neq 0$, so ergibt sich $y^2 = 2x^2$. Trägt man dies in die dritte Lagrangesche Gleichung ein, so folgt $x^2 = 1/3$. Es muss also

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{und} \quad y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$

sein. Durch einsetzen bestätigt man, dass die Punkte

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right), \quad \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right), \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

tatsächlich dem Lagrangeschen Gleichungssystem genügen, und zwar die ersten beiden in Verbindung mit $\lambda = -1/\sqrt{3}$, die letzten beiden zusammen mit $\lambda = 1/\sqrt{3}$. Ist nun, entgegen der bisher gemachten Voraussetzung, $y = 0$, so muss $x^2 = 1$ und $\lambda = 0$ sein. In der Tat lösen die Punkte

$$(1,0) \qquad (-1,0)$$

in Verbindung mit $\lambda = 0$ das Lagrangesche Gleichungssystem. Es ist

$$\begin{aligned} &f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}, \\ &f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}, \\ &f(1,0) = f(-1,0) = 0. \end{aligned}$$

Da die Einheitskreislinie kompakt ist, folgt nun, dass $2/(3\sqrt{3})$ das Maximum und $-2/(3\sqrt{3})$ das Minimum von f unter der vorgegebenen Nebenbedingung ist. $(1,0)$ ist offenbar Stelle eines lokalen Minimums, $(-1,0)$ Stelle eines lokalen Maximums von f (immer unter der Nebenbedingung $x^2+y^2=1$).