Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Nada Sissouno

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2009/2010
9.12.2009

8. Tutorium zur „Analysis II“

Harmonische Funktionen

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \mapsto \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Dann heißt f harmonisch auf U, wenn

$$(\triangle f)(x) := \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) = 0 \qquad \forall x \in U. \tag{1}$$

Die partielle Differentialgleichung (1) heißt *Laplacegleichung* und $\triangle$ der *Laplaceoperator*.

Aufgabe T1

Eine Verschiebung im $\mathbb{R}^2$ wird beschrieben durch eine Koordinatentransformation $\tilde{x} = x + a$, $\tilde{y} = y + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$; eine Drehung durch $\tilde{x} = x\cos\alpha + y\sin\alpha$, $\tilde{y} = -x\sin\alpha + y\cos\alpha$ mit $\alpha \in [0, 2\pi)$. Sei u eine harmonische Funktion: $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

Zeigen Sie, dass die Funktion $\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y}) = u(x(\tilde{x}, \tilde{y}), y(\tilde{x}, \tilde{y}))$ ebenfalls harmonisch ist: $\tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}} + \tilde{u}_{\tilde{y}\tilde{y}} = 0$.

Zusatzaufgabe für Studierende mit Grundkenntnissen in linearer Algebra:
Bestätigen Sie diese Invarianz des Laplaceoperators gegenüber Verschiebung und Drehungen auch im $\mathbb{R}^n$.

Lösung:
Invarianz bzgl. Verschiebungen ist klar.
Invarianz bgzl. Drehungen im $\mathbb{R}^2$:
Haben

$$u_x = \tilde{u}_{\tilde{x}}\tilde{x}_x + \tilde{u}_{\tilde{y}}\tilde{y}_x = \tilde{u}_{\tilde{x}}\cos\alpha - \tilde{u}_{\tilde{y}}\sin\alpha,$$
$$u_y = \tilde{u}_{\tilde{x}}\tilde{x}_y + \tilde{u}_{\tilde{y}}\tilde{y}_y = \tilde{u}_{\tilde{x}}\sin\alpha + \tilde{u}_{\tilde{y}}\cos\alpha$$

und weiter

$$\begin{aligned}
u_{xx} &= (\tilde{u}_{\tilde{x}}\cos\alpha - \tilde{u}_{\tilde{y}}\sin\alpha)_{\tilde{x}}\cos\alpha - (\tilde{u}_{\tilde{x}}\cos\alpha - \tilde{u}_{\tilde{y}}\sin\alpha)_{\tilde{y}}\sin\alpha \\
&= \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}}\cos^2\alpha - 2\tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{y}}\sin\alpha\cos\alpha + \tilde{u}_{\tilde{y}\tilde{y}}\sin^2\alpha, \\
u_{yy} &= (\tilde{u}_{\tilde{x}}\sin\alpha + \tilde{u}_{\tilde{y}}\cos\alpha)_{\tilde{x}}\sin\alpha + (\tilde{u}_{\tilde{x}}\sin\alpha + \tilde{u}_{\tilde{y}}\cos\alpha)_{\tilde{y}}\cos\alpha \\
&= \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}}\sin^2\alpha + 2\tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{y}}\sin\alpha\cos\alpha + \tilde{u}_{\tilde{y}\tilde{y}}\cos^2\alpha.
\end{aligned}$$

Addition liefert:

$$u_{xx} + u_{yy} = (\tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}} + \tilde{u}_{\tilde{y}\tilde{y}})(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}} + \tilde{u}_{\tilde{y}\tilde{y}}.$$

Invarianz bgzl. Drehungen im $\mathbb{R}^n$:

Drehungen im $\mathbb{R}^n$ werden beschrieben durch

$$(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)^T =: \tilde{x} = Ax = (x_1, \ldots, x_n)$$

mit einer orthogonalen Matrix A. Orthogonalität von $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ bedeutet

$$A^T A = AA^T = I \quad \text{bzw.} \quad \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj} = \delta_{ij}.$$

Für $\tilde{u}(\tilde{x}) = u(x)$ ist dann wegen $\tilde{x}_k = \sum_i a_{ki} x_i$

$$u_{x_k} = \tilde{u}_{\tilde{x}_1} \frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial x_k} + \ldots + \tilde{u}_{\tilde{x}_n} \frac{\partial \tilde{x}_n}{\partial x_k} = \tilde{u}_{\tilde{x}_1} a_{1k} + \ldots + \tilde{u}_{\tilde{x}_n} a_{nk}$$

und weiter

$$\begin{aligned} u_{x_k x_k} &= (\tilde{u}_{\tilde{x}_1} a_{1k} + \ldots + \tilde{u}_{\tilde{x}_n} a_{nk})_{\tilde{x}_1} \frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial x_k} + \ldots + (\tilde{u}_{\tilde{x}_1} a_{1k} + \ldots + \tilde{u}_{\tilde{x}_n} a_{nk})_{\tilde{x}_n} \frac{\partial \tilde{x}_n}{\partial x_k} \\ &= (\tilde{u}_{\tilde{x}_1 \tilde{x}_1} a_{1k} + \ldots + \tilde{u}_{\tilde{x}_1 \tilde{x}_n} a_{nk}) \cdot a_{1k} + \ldots + (\tilde{u}_{\tilde{x}_1 \tilde{x}_n} a_{1k} + \ldots + \tilde{u}_{\tilde{x}_1 \tilde{x}_n} a_{nk}) \cdot a_{nk} \end{aligned}$$

bzw.

$$u_{x_k x_k} = \sum_{i,j} \tilde{u}_{\tilde{x}_i \tilde{x}_j} a_{ik} a_{jk}.$$

Hieraus:

$$\begin{aligned} \triangle u &= \sum_{i,j,k} \tilde{u}_{\tilde{x}_i \tilde{x}_j} a_{ik} a_{jk} = \sum_{i,j} \tilde{u}_{\tilde{x}_i \tilde{x}_j} \delta_{ij} \\ &= \sum_i \tilde{u}_{\tilde{x}_i \tilde{x}_i} = \triangle \tilde{u}. \end{aligned}$$

Aufgabe T2

Wir betrachten in der Ebene kartesische (x, y) und Polarkoordinaten (r, φ) mit $x = r\cos\varphi$, $\varphi = r\sin\varphi$. Die Funktion u genüge der Laplacegleichung $u_{xx} + u_{yy} = 0$.
Zeigen Sie, dass für $v(r, \varphi) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ gilt:

$$v_{rr} + \frac{1}{r^2} v_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r} v_r = 0 \qquad (= \text{Laplacegleichung in Polarkoordinaten}).$$

Lösung: Die Transformation $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$ hat die Jacobimatrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

mit der Inversen

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\frac{\sin\varphi}{r} \\ \sin\varphi & \frac{\cos\varphi}{r} \end{pmatrix}.$$

Hieraus bekommt man

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\partial v}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{r}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial r}\sin\varphi - \frac{\partial v}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi}{r} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\partial v}{\partial\varphi}\frac{\sin\varphi}{r}\right)\\
&= \cos^2\varphi\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - 2\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial r\partial\varphi} + \frac{\sin^2\varphi}{r}\frac{\partial v}{\partial\varphi}\\
&\quad + \frac{\sin^2\varphi}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2} + 2\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2}\frac{\partial v}{\partial\varphi}\\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial r}\sin\varphi + \frac{\partial v}{\partial\varphi}\frac{\cos\varphi}{r}\right)\\
&= \sin^2\varphi\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + 2\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial r\partial\varphi} + \frac{\cos^2\varphi}{r}\frac{\partial v}{\partial\varphi}\\
&\quad + \frac{\cos^2\varphi}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2} - 2\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2}\frac{\partial v}{\partial\varphi}.
\end{aligned}$$

Addition ergibt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}.$$

Aufgabe T3

Wir betrachten im Raum $\mathbb{R}^3$ kartesische (x, y, z) und Kugelkoordinaten (r, φ, θ) mit $x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta$:

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{s^2+z^2} \qquad \text{mit} \qquad s = \sqrt{x^2+y^2},$$
$$x = s\cos\varphi, \quad y = s\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta, \quad s = r\sin\theta.$$

Die Funktion u genüge der Laplacegleichung $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$.
Man zeige, dass für $v(r, \varphi, \theta)$ gilt:

$$v_{rr} + \frac{2}{r}\, v_r + \frac{1}{r^2}\left(u_{\theta\theta} + (\cot\theta)u_\theta + \frac{1}{\sin^2\theta}\, u_{\varphi\varphi}\right) = 0 \qquad (= \text{Laplacegleichung in Kugelkoordinaten}).$$

(Hinweis: Es vereinfacht die Rechnung, in zwei Schritten vorzugehen und in jedem Schritt das Resultat von Aufgabe 2 zu benutzen.)

Lösung:

Wir nehmen den Koordinatenwechsel in 2 Schritten vor:

$$(x, y, z) \mapsto (s, \varphi, z) \mapsto (r, \varphi, \theta).$$

Nach den in Aufgabe 2 durchgeführten Rechnungen gilt sowohl

$$u_{zz} + u_{ss} = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$$

als auch

$$u_{xx} + u_{yy} = u_{ss} + \frac{1}{s}u_s + \frac{1}{s^2}u_{\varphi\varphi}.$$

(Wir verzichten darauf, ständig neue Bezeichnungen für Funktionen einzuführen, die nun etwa von s, φ, z statt von x, y, z abhängen).
Addition ergibt:

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + \frac{1}{s}u_s + \frac{1}{s^2}u_{\theta\theta}. \tag{1}$$

Wir substituieren nun $s = r\sin\theta$; berechnen dazu mit Kettenregel

$$u_s = u_r \frac{\partial r}{\partial s} + u_\theta \frac{\partial \theta}{\partial s} + u_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial s} \tag{2}$$

$$= u_r \frac{r}{s} + u_\theta \frac{\cos\theta}{r} + u_\theta \cdot 0 \tag{3}$$

Beachte: $r = \sqrt{s^2 + z^2}$

$$\Rightarrow \frac{\partial r}{\partial s} = \frac{2s}{2\sqrt{s^2+z^2}} = \frac{s}{r}$$

und $s = r\sin\theta \;\Rightarrow\; \theta = \arcsin\frac{s}{r}$; r hängt von s ab:

$$\Rightarrow \theta = \arcsin\frac{s}{\sqrt{s^2+z^2}}.$$

Ableiten:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\theta}{\partial s} &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{s^2}{s^2+z^2}}} \cdot \frac{\sqrt{s^2+z^2} - s\frac{2s}{2\sqrt{s^2+z^2}}}{s^2+z^2} \\
&= \frac{1}{z} \cdot \frac{\sqrt{s^2+z^2} - \frac{s^2}{\sqrt{s^2+z^2}}}{\sqrt{s^2+z^2}} = \frac{1}{z}\left(1 - \frac{s^2}{s^2+z^2}\right) \\
&= \frac{z}{s^2+z^2} = \frac{r\cos\theta}{r^2} = \frac{\cos\theta}{r}.
\end{aligned}$$

Setzt man (3) sowie $s = r\sin\theta$ in (1) ein, folgt die Behauptung.

Aufgabe T4

Bestimmen Sie die rotationssymmetrischen Lösungen der Laplacegleichung auf $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ und $\mathbb{R}^3$.

Lösung:

Wir nutzen die Darstellung der Laplacegleichung in Polar- bzw. Kugelkoordinaten. Rotationssymmetrie heißt: die gesuchte Funktion hängt nur von r ab. Damit reduziert sich die Laplacegleichung auf

$$v_{rr} + \frac{n-1}{r}\, v_r = 0 \qquad \text{mit} \qquad n = 2, 3.$$

Diese kann leicht gelöst werden: aus $v_{rr} + \frac{n-1}{r}\, v_r = 0$ folgt

$$r^{n-1} v_{rr} + (n-1) r^{n-2} v_r = (r^{n-1} v_r)_r = 0,$$

also

$$r^{n-1} v_r = c_1 = const.$$

und somit

$$v_r = c_1\, r^{1-n},$$

woraus schließlich

$$v(r) = \begin{cases} c_1 \ln r + c_2 & \text{für} \quad n = 2 \\ c_1 r^{2-n} + c_2 & \text{für} \quad n = 3 \end{cases}$$

folgt (letzteres ist sogar für alle $n \geq 3$ richtig).

Hierdurch sind die rotationssymmetrischen Funktionen auf $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ bzw. $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ beschrieben (beachte für $r = 0$ haben diese Funktionen eine Singularität). Sucht man rotationssymmetrische Lösungen auf ganz $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$, muß also $c_1 = 0$ sein, und es bleiben nur die konstanten Funktionen übrig.