Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Nada Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/2010
3.12.2009

7. Tutorium zur „Analysis II“

Bernoulli-Zahlen

Nach Satz 2 aus Abschnitt 9.5 läßt sich die Funktion

$$\frac{z}{e^z - 1} = \frac{1}{1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots}$$

in eine Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ entwickeln, welche wir in der Form $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$ schreiben, d.h. mit $B_n = n!\, b_n$. Die so definierten Zahlen B_n heißen die *Bernoulli-Zahlen*.

Aufgabe T1

Berechnen Sie $B_0,\ B_1, \dots, B_5$.

Lösung:

Aus dem Ansatz

$$\frac{1}{1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$$

beziehungsweise

$$\left(1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^3}{4!} + \dots\right)\left(\frac{B_0}{1} + \frac{B_1}{1!} z + \frac{B_2}{2!} z^2 + \frac{B_3}{3!} z^3 + \dots\right) = 1$$

erhalten wir nach Ausmultiplizieren (Cauchyprodukt) und Koeffizientenvergleich die Gleichungen

$$\begin{aligned}
B_0 &= 1\\
\frac{B_1}{1!} + \frac{1}{2!} B_0 &= 0\\
\frac{B_2}{2!} + \frac{1}{2!}\frac{B_1}{1!} + \frac{1}{3!} B_0 &= 0\\
\frac{B_3}{3!} + \frac{1}{2!}\frac{B_2}{2!} + \frac{1}{3!}\frac{B_1}{1!} + \frac{1}{4!} B_0 &= 0\\
\frac{B_4}{4!} + \frac{1}{2!}\frac{B_3}{3!} + \frac{1}{3!}\frac{B_2}{2!} + \frac{1}{4!}\frac{B_1}{1!} + \frac{1}{5!} B_0 &= 0\\
\frac{B_5}{5!} + \frac{1}{2!}\frac{B_4}{4!} + \frac{1}{3!}\frac{B_3}{3!} + \frac{1}{4!}\frac{B_2}{2!} + \frac{1}{5!}\frac{B_1}{1!} + \frac{1}{6!} B_0 &= 0
\end{aligned}$$

und allgemein für $n = 2, 3, 4, \ldots$

$$\frac{1}{n!}B_0 + \frac{1}{(n-1)!}\frac{B_1}{1!} + \frac{1}{(n-2)!}\frac{B_2}{2!} + \ldots + \frac{1}{1!}\frac{B_{n-1}}{(n-1)!} = 0. \tag{$*$}$$

Damit lassen sich $B_0, \ldots, B_5$ nacheinander berechnen:

$$B_0 = 1, \qquad B_1 = -\frac{1}{2}, \qquad B_2 = \frac{1}{6}, \qquad B_3 = 0, \qquad B_4 = -\frac{1}{30}, \qquad B_5 = 0$$

Aufgabe T2

Zeigen Sie, dass $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = 0$ für $n = 2, 3, \ldots$ und dass alle B_n rational sind.

Lösung:

Multiplizieren $(*)$ mit $n!$ durch und erhalten

$$\frac{n!}{n!0!}B_0 + \frac{n!}{(n-1)!1!}B_1 + \frac{n!}{(n-2)!2!}B_2 + \ldots + \frac{n!}{1!(n-1)!}B_{n-1} = 0$$

beziehungsweise

$$\binom{n}{0}B_0 + \binom{n}{1}B_1 + \ldots + \binom{n}{n-1}B_{n-1} = 0.$$

Insbesondere ist daher

$$B_{n-1} = \frac{1}{\binom{n}{n-1}}\left(-\binom{n}{0}B_0 - \binom{n}{1}B_1 - \ldots - \binom{n}{n-2}B_{n-2}\right).$$

Sind alle $B_0, B_1, \ldots, B_{n-2}$ rational, dann auch B_{n-1}.

Aufgabe T3

Zeigen Sie, dass $B_{2n+1} = 0$ für $n \geq 1$.

Lösung:

Am einfachsten ist es wohl, die Beziehung aus Aufgabe 4 zu benutzen, die wir hier zuerst zeigen:

$$\frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = \frac{z}{2}\left(\frac{2}{e^z - 1} + 1\right) = \frac{z}{2}\frac{e^{z/2} + e^{-z/2}}{e^{z/2} - e^{-z/2}} = \frac{z}{2}\frac{\cosh(z/2)}{\sinh(z/2)}.$$

Nun ist

$$\frac{-z}{2}\frac{\cosh(-z/2)}{\sinh(-z/2)} = \frac{-z}{2}\frac{\cosh(z/2)}{-\sinh(z/2)} = \frac{z}{2}\frac{\cosh(z/2)}{\sinh(z/2)},$$

d.h. für die Funktion

$$f(z) := \frac{z}{2}\frac{\cosh(z/2)}{\sinh(z/2)} = \frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2}$$

gilt $f(z) = f(-z)$, d.h. f ist eine *gerade* Funktion. Andererseits haben wir für f die Potenzreihenentwicklung

$$f(z) = B_0 + \frac{B_2}{2!}z^2 + \frac{B_3}{3!}z^3 + \frac{B_4}{4!}z^4 + \frac{B_5}{5!}z^5 + \ldots,$$

und es ist auch

$$f(-z) = B_0 + \frac{B_2}{2!}z^2 - \frac{B_3}{3!}z^3 + \frac{B_4}{4!}z^4 - \frac{B_5}{5!}z^5 + \ldots,$$

Wegen $f(z) = f(-z)$ erhält man durch Addition dieser Potenzreihen

$$f(z) = \frac{f(z) + f(-z)}{2} = B_0 + \frac{B_2}{2!}z^2 + \frac{B_4}{4!}z^4 + \frac{B_6}{6!}z^6 + \ldots$$

Koeffizientenvergleich zeigt $B_3 = B_5 = \ldots = 0$.

Aufgabe T4

Machen Sie sich klar, dass

$$\frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = \frac{z}{2}\,\frac{\cosh(\frac{z}{2})}{\sinh(\frac{z}{2})}$$

und leiten Sie hieraus die Potenzreihenentwicklungen der Funktionen $f(x) = x\,\cot(x)$ bzw. $g(x) = \tan(x)$ ab.

Lösung:

Wir haben bereits gezeigt, dass

$$f(z) = \frac{z}{2}\frac{\cosh(z/2)}{\sinh(z/2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} z^{2n}.$$

Mit $z = 2\omega$ folgt hieraus

$$\omega \frac{\cosh \omega}{\sinh \omega} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} 2^{2n} \omega^{2n}.$$

Hierin setzen wir schließlich $\omega = ix$ und erhalten wegen

$$\omega^{2n} = (ix)^{2n} = (-1)^n x^{2n}$$

sowie wegen

$$\begin{aligned}\cosh ix &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{\cos x + i \sin x + \cos x - i \sin x}{2} = \cos x,\\ \sinh ix &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} = \frac{\cos x + i \sin x - \cos x + i \sin x}{2} = i \sin x\end{aligned}$$

die Potenzreihenetwicklung

$$x \cot x = x \frac{\cos x}{\sin x} = ix \frac{\cos x}{i \sin x} = \omega \frac{\cosh \omega}{\sinh \omega} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} 2^{2n} \omega^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{B_{2n}}{(2n)!} 2^{2n} x^{2n}.$$

Da

$$\begin{aligned}\cot x - 2 \cot 2x &= \frac{\cos x}{\sin x} - 2\frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x}\\ &= \frac{\cos^2 x - (\cos^2 x - \sin^2 x)}{\sin x \cos x} = \frac{\sin^2 x}{\sin x \cos x} = \tan x,\end{aligned}$$

hat man

$$x \cot x - 2x \cot 2x = x \tan x,$$

und hieraus gewinnen wir eine Reihe für $x \tan x$:

$$\begin{aligned}x \tan x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{B_{2n}}{(2n)!} 2^{2n} x^{2n} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{B_{2n}}{(2n)!} 2^{2n} 2^{2n} x^{2n}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{B_{2n}}{(2n)!} (1 - 2^{2n}) x^{2n}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{B_{2n}}{(2n)!} (2^{2n} - 1) x^{2n}\end{aligned}$$

Division durch x liefert schließlich die Tangensentwicklung

$$\tan x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{2n}(2^{2n} - 1) B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1}.$$

Aufgabe T5

Nach der geometrischen Summenformel ist

$$\sum_{k=0}^{n} e^{kz} = \frac{e^{(n+1)z}-1}{e^z-1} = \frac{e^{(n+1)z}-1}{z} \cdot \frac{z}{e^z-1}.$$

Ersetzen Sie die hierin vorkommenden Funktionen durch ihre Potenzreihen und leiten Sie durch Koeffizientenvergleich die Summenformel für die p-ten Potenzen der ersten n natürlichen Zahlen her:

$$1^p+2^p+\cdots+n^p = \frac{1}{p+1}\left(\binom{p+1}{1}(n+1)B_p + \binom{p+1}{2}(n+1)^2 B_{p-1} + \cdots + \binom{p+1}{p+1}(n+1)^{p+1}B_0\right).$$

Lösung: Ersetzen in $\sum_{k=0}^n e^{kz} = \frac{e^{(n+1)z}-1}{z}\frac{z}{e^z-1}$ alle Funktionen durch ihre Potenzreihen:

$$\sum_{k=0}^{n} e^{kz} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(kz)^p}{p!} = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{k^p}{p!}z^p, \qquad (**)$$

$$\begin{aligned}\frac{e^{(n+1)z}-1}{z}\,\frac{z}{e^z-1} &= \left(\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(n+1)^{p+1}}{(p+1)!}z^p\right)\left(\sum_{p=0}^{\infty}\frac{B_p}{p!}z^p\right)\\ &= \sum_{p=0}^{\infty}\left(\frac{n+1}{1!}\frac{B_p}{p!} + \frac{(n+1)^2}{2!}\frac{B_{p-1}}{(p-1)!} + \ldots + \frac{(n+1)^{p+1}}{(p+1)!}\frac{B_0}{1}\right)z^p \qquad (***)\end{aligned}$$

(Cauchyprodukt). Koeffizientenvergleich vor z^p in $(**)$ und $(***)$ ergibt

$$\frac{1}{p!}\sum_{k=0}^{n}k^p = \frac{n+1}{1!}\frac{B_p}{p!} + \frac{(n+1)^2}{2!}\frac{B_{p-1}}{(p-1)!} + \ldots + \frac{(n+1)^{p+1}}{(p+1)!}\frac{B_0}{1},$$

also

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}k^p &= \frac{1}{p+1}\left(\frac{(p+1)!}{1!p!}(n+1)B_p + \frac{(p+1)!}{2!(p-1)!}(n+1)^2B_{p-1} + \ldots + \frac{(p+1)!}{(p+1)!0!}(n+1)^{p+1}B_0\right)\\ &= \frac{1}{p+1}\left(\binom{p+1}{1}(n+1)B_p + \binom{p+1}{2}(n+1)^2B_{p-1} + \ldots + \binom{p+1}{p+1}(n+1)^{p+1}B_0\right),\end{aligned}$$

d.h.

$$\sum_{k=0}^{n}k^p = \frac{1}{p+1}\sum_{r=1}^{p+1}\binom{p+1}{r}(n+1)^r B_{p+1-r}. \qquad (p\geq 1)$$

Für $p=1,2,3$ stimmt dies natürlich mit den bekannten Formeln überein.

Anmerkung: Es gilt auch die folgende Bemerkenswerte Beziehung:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2p}} = (-1)^{p-1}\frac{B_{2p}(2\pi)^{2p}}{2(2p)!} \qquad (p=1,2,\ldots),$$

aus der zum Beispiel folgt $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.