Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Nada Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/2010
26.11.2009

6. Tutorium zur „Analysis II“

Bernstein-Polynome und der Weierstraß'sche Approximationssatz

Wir wollen in diesem Tutorium den folgenden Weierstraß'schen Approximationssatz beweisen:

Satz:
Für jede auf dem Intervall $[a, b]$ stetige Funktion f gibt es eine Folge (f_n) von Polynomen, die gleichmäßig gegen f konvergiert.

Wir führen den Beweis zunächst für $[a, b] = [0, 1]$. Jeder Funktion f auf $[0, 1]$ ordnen wir die Funktion

$$f_n(x) := \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n}) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

zu. Offenbar ist f_n für jede Funktion f ein Polynom vom Grad n. Das Polynom f_n heißt $n$tes Bernstein-Polynom für f.

Aufgabe T1

Bestimmen Sie die Bernsteinpolynome für die Funktionen $f(x) = 1$, $f(x) = x$ und $f(x) = x(1-x)$. Machen Sie sich klar, dass in allen 3 Fällen gilt:

$$\|f - f_n\|_\infty \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Lösung: Bernsteinpolynome für $f(x) = 1$:

$$\begin{aligned} f_n(x) = \sum_{k=0} f(\frac{k}{n}) x^k (1-x)^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= (x + (1-x))^n = 1 \end{aligned}$$

Bernsteinpolynome für $f(x) = x$:

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{kn!}{nk!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= x \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-1-k} = x(x + (1-x))^{n-1} = x \,. \end{aligned}$$

Bernsteinpolynome für $f(x) = x(1-x)$:

$$\begin{aligned}
f_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k(n-k)}{n^2}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k(n-k)n!}{n^2k!(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k} \\
&= \frac{n-1}{n}x(1-x)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(n-2)!}{(k-1)!(n-1-k)!}x^{k-1}(1-x)^{n-k-1} \\
&= \frac{n-1}{n}x(1-x)\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(n-2)!}{k!(n-2-k)!}x^k(1-x)^{n-k-2} \\
&= \frac{n-1}{n}x(1-x)(x+(1-x))^{n-2} = \frac{n-1}{n}x(1-x) \ .
\end{aligned}$$

In allen drei Fällen gilt offenbar $||f_n - f||_\infty \to 0$.

Aufgabe T2

Beweisen Sie die Abschätzung

$$0 \le \sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \le \frac{1}{4n}.$$

Lösung: Es ist zunächst

$$\sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\left(x^2-\frac{2k}{n}x+\frac{k^2}{n^2}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$= x^2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} - 2x\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^2}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$\overset{(1)}{=} x^2 - 2x\cdot x - \sum_{k=0}^{n}\frac{k(n-k)}{n^2}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$\overset{(1)}{=} x^2 - 2x^2 - \left(1-\frac{1}{n}\right)x(1-x) + x$$

$$= x^2 - 2x^2 - x(1-x) + x + \frac{1}{n}x(1-x) = \frac{1}{n}x(1-x) \ .$$

Da alle Summanden nichtnegativ sind, gilt also

$$0 \le \sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \le \frac{1}{n}x(1-x) \ .$$

Müssen nun noch zeigen, dass

$$\frac{1}{n}x(1-x) \le \frac{1}{4n} \qquad \text{für } x \in [0,1] \ .$$

Dies kann z.B. mit der Ungelichung vom arithmetisch-geometrischen Mittel geschehen (aber bitte <u>nicht</u>, indem man das Maximum der Funktion $x \mapsto x(1-x)$ mittels Differenzieren ermittelt! Dies wäre unsportlich!).

Wir wollen nun den Weierstraß'schen Approximationssatz auf $[0,1]$ in der folgenden genaueren Form zeigen:

Satz:
Sei f auf $[0,1]$ stetig. Dann konvergiert die Folge (f_n) der Bernsteinpolynome von f gleichmäßig gegen f.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Da f auf $[0,1]$ gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ so, dass für alle $x, y \in [0,1]$ mit $|x-y| < \delta$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Für den Beweis des Satzes haben wir die Differenz $|f(x) - f_n(x)|$ für jedes $x \in [0,1]$ abzuschätzen. Es ist wegen Aufgabe 1

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} |f(x) - f(\frac{k}{n})| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \,, \tag{1}$$

und wir spalten die Summe in zwei Teile auf um auszunutzen, dass $|f(x) - f(\frac{k}{n})| < \varepsilon$, wenn nur $|\frac{k}{n} - x| < \delta$. Sei dazu

$$A_n = \left\{ k : \ 0 \leq k \leq n, \ |x - \frac{k}{n}| < \delta \right\},$$
$$B_n = \left\{ k : \ 0 \leq k \leq n, \ |x - \frac{k}{n}| \geq \delta \right\}.$$

Dann ist wie gewünscht

$$|f(x) - f(\frac{k}{n})| < \varepsilon \qquad \text{für } k \in A_n$$

und, mit $c := \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$,

$$|f(x) - f(\frac{k}{n})| \leq 2c \qquad \text{für } k \in B_n.$$

Nach Definition von B_n gilt weiter $\delta^2 \leq \left(x - \frac{k}{n}\right)^2$, daher hat man außerdem die Abschätzung

$$|f(x) - f(\frac{k}{n})| \leq \frac{2c}{\delta^2} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \qquad \text{für } k \in B_n.$$

Aufgabe T3

Schätzen Sie nun die Differenz (1) ab und führen Sie den Beweis des Weierstraß'schen Approximationssatzes zu Ende.

Lösung: Schätzen (1) ab:

$$\begin{aligned}
|f(x) - f_n(x)| &\leq \sum_{k=0}^{n} |f(x) - f(\frac{k}{n})| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k\in A_n} |f(x) - f(\frac{k}{n})| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k\in B_n} |f(x) - f(\frac{k}{n})| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&\leq \varepsilon \sum_{k\in A_n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \frac{2c}{\delta^2} \sum_{k\in B_n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&\leq \varepsilon \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \frac{2c}{\delta^2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \,.
\end{aligned}$$

Nach (1) und (2) ist daher:

$$|f(x) - f_n(x)| \le \varepsilon + \frac{2c}{\delta^2} \cdot \frac{1}{4n} \; .$$

Bisher war n völlig beliebig. Wählen wir nun ein n_0 so, dass

$$\frac{2c}{\delta^2} \cdot \frac{1}{4n_0} < \varepsilon$$

und erhalten für alle $x \in [0,1]$ und alle $n \ge n_0$

$$|f(x) - f_n(x) < 2\varepsilon| \; .$$

Dies ist die behauptete gleichmäßige Konvergenz.

Aufgabe T4

Übertragen Sie schließlich dieses Resultat auf ein beliebiges endliches Intervall $[a,b]$.

Lösung: Wir haben bisher für jede stetige Funktion f auf $[0,1]$ und für die zugehörige Bernsteinpolynome bewiesen:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; : \; \forall n \ge n_0, \forall x \in [0,1] : \qquad |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \; . \tag{1}$$

Die Funktionen

$$g(y) = \frac{y-a}{b-a} \qquad \text{bzw.} \qquad g^{(-1)}(y) = (b-a)x + a$$

bilden das Intervall $[a,b]$ auf $[0,1]$ bzw. $[0,1]$ auf $[a,b]$ linear und eindeutig ab.
Ist nun h eine auf $[a,b]$ stetige Funktion, so ist $h \circ g^{(-1)} =: f$ eine auf $[0,1]$ stetige Funktion. Für die zu f gehörenden Bernsteinpolynome f_n gilt dann (1). Dann gilt aber auch:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; : \; \forall n \ge n_0, \forall x \in [a,b] : \qquad |f(g(x)) - f_n(g(x))| < \varepsilon \; .$$

Nun ist $f \circ g = h$, und die Funktionen $h_n := f_n \circ g$ sind offenbar Polynome auf $[a,b]$. Es gilt also:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; : \; \forall n \ge n_0, \forall x \in [a,b] : \qquad |h(x) - h_n(x)| < \varepsilon \; ,$$

d.h. die Polynome h_n konvergieren gleichmäßig auf $[a,b]$ gegen die stetige Funktion h.