Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Nada Sissouno

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2009/2010
19.11.2009

5. Tutorium zur „Analysis II"

Wallis'sches Produkt, Stirlingsche Formel

Unser erstes Ziel ist es, die Wallis'sche Produktformel

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1} \quad \left(:= \lim_{k\to\infty} \prod_{n=1}^{k} \frac{4n^2}{4n^2-1} \right) \tag{1}$$

zu beweisen.

Aufgabe T1

Sei $I_m(x) := \int \sin^m(x)\,dx$ für $m \geq 0$. Bestimmen Sie I_0, I_1 und zeigen Sie für $m \geq 2$ die Rekursionsformel

$$I_m = -\frac{1}{m}\cos(x)\sin^{m-1}(x) + \frac{m-1}{m} I_{m-2}.$$

Lösung: Es ist $I_0 = x, I_1 = -\cos(x)$. Mit partieller Integration folgt

$$\begin{aligned} I_m &= \int \sin^m(x)dx = \int \underbrace{\sin^{m-1}(x)}_{v}\underbrace{\sin(x)}_{u'}\,dx \\ &= -\cos(x)\sin^{m-1}(x) + (m-1)\int \cos^2(x)\sin^{m-2}(x)dx \\ &= -\cos(x)\sin^{m-1}(x) + (m-1)\int (1-\sin^2(x))\sin^{m-2}(x)dx \\ &= -\cos(x)\sin^{m-1}(x) + (m-1)I_{m-2} + (m-1)I_m \end{aligned}$$

Umstellen und Auflösen nach I_m ergibt:

$$I_m = -\frac{1}{m}\cos(x)\sin^{m-1}(x) + \frac{m-1}{m} I_{m-2}.$$

Hiermit können alle I_m rekursiv bestimmt werden.

Aufgabe T2

Berechnen Sie hiermit die Zahlen

$$A_m := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m(x)\,dx$$

und zeigen Sie, dass

$$A_{2n+2} \leq A_{2n+1} \leq A_{2n}.$$

Lösung: Für die bestimmten Integrale $A_m = I_m(\frac{\pi}{2}) - I_m(0)$ gilt dann

$$A_0 = \frac{\pi}{2}, A_1 = 1 \quad \text{und} \quad A_m = \frac{m-1}{m} A_{m-2} \quad \text{für alle} \quad m \geq 2.$$

Hieraus folgt für gerades m

$$A_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdot \ldots \cdot 3 \cdot 1}{2n(2n-2)\cdot \ldots \cdot 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2},$$

und für ungerades m ist

$$A_{2n+1} = \frac{2n(2n-2)\cdot \ldots \cdot 4 \cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdot \ldots \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}.$$

Wegen $\sin^{2n+2}(x) \leq \sin^{2n+1}(x) \leq \sin^{2n}(x)$ auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ folgt sofort

$$A_{2n+2} \leq A_{2n+1} \leq A_{2n} \quad \text{für alle} \quad n.$$

Aufgabe T3

Schließen Sie hieraus auf die Existenz des Grenzwertes $\lim \frac{A_{2n+1}}{A_{2n}}$ und bestimmen Sie diesen. Leiten Sie hieraus (1) ab.

Lösung: Aus

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_{2n+2}}{A_{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+2} = 1$$

folgt, dass der Grenzwert $\lim \frac{A_{2n+1}}{A_{2n}}$ existiert und gleich 1 ist (da ja $\frac{A_{2n+2}}{A_{2n}} \leq \frac{A_{2n+1}}{A_{2n}} \leq 1$). Andererseits ist aber

$$\begin{aligned}
\frac{A_{2n+1}}{A_{2n}} &= \frac{2n \cdot 2n \cdot (2n-2)(2n-2) \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2}{(2n+1)\cdot(2n-1)\cdot(2n-1)(2n-3)\cdot \ldots \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1} \cdot \frac{2}{\pi} \\
&= \frac{4n^2 \cdot 4(n-1)^2 \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 1^2}{(4n+1)^2 \cdot (4(n-1)^2 - 1) \cdot \ldots (4 \cdot 1^2 - 1)} \cdot \frac{2}{\pi},
\end{aligned}$$

woraus sofort (1) folgt.

Unser zweites Ziel ist die Stirling'sche Formel, die eine Aussage über das asymptotische Verhalten der Zahlen $n!$ macht. Sind (a_n), (b_n) Folgen von Zahlen a_n, $b_n \neq 0$, so nennen wir diese Folgen asymptotisch gleich und schreiben dafür $a_n \sim b_n$, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

Die Stirlingsche Formel lautet dann

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Beweis: Im Tutorium über numerische Integration haben wir die Trapezregel bewiesen:

Ist $f : [k, k+1] \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, so existiert ein $\xi \in [k, k+1]$ mit

$$\int_k^{k+1} f(x)\, dx = \frac{1}{2}(f(k) + f(k+1)) - \frac{1}{12} f''(\xi).$$

Wegen $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2}$ folgt hieraus für $k = 1, 2, \ldots$: $\exists\, \xi_k \in [k, k+1]$:

$$\int_k^{k+1} \ln(x)\, dx = \frac{1}{2}\left(\ln(k) + \ln(k+1)\right) + \frac{1}{12\,\xi_k^2}.$$

Summation von $k = 1$ bis $n-1$ ergibt

$$\int_1^n \ln(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} \ln(k) - \frac{1}{2}\ln(n) + \frac{1}{12}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\xi_k^2}.$$

Da

$$\int_1^n \ln(x)\, dx = x\ln(x) - x|_1^n = n\ln(n) - n + 1,$$

folgt

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(k) = \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln(n) - n + \gamma_n$$

mit $\gamma_n := 1 - \frac{1}{12}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\xi_k^2}$. Wir nehmen von beiden Seiten die Exponentialfunktion und erhalten mit $c_n := e^{\gamma_n}$

$$n! = n^{n+\frac{1}{2}}\, e^{-n} c_n.$$

Aufgabe T4

Zeigen Sie, dass der Grenzwert $\lim c_n =: c$ existiert.

Lösung: Wegen

$$0 \le \frac{1}{\xi_k^2} \le \frac{1}{k^2}$$

existiert der Grenzwert

$$\gamma := \lim_{n\to\infty}\gamma_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{12}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\xi_k^2}\right) = 1 - \frac{1}{12}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\xi_k^2}$$

(Majorantenkriterium). Also existiert auch der Grenzwert

$$c = \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} e^{\gamma_n} = e^{\gamma}$$

(Stetigkeit der Exponentialfunktion).

Aufgabe T5

Brechnen Sie c, indem Sie die Folge $\frac{c_n^2}{c_{2n}}$ betrachten und die Wallis'sche Formel benutzen. Leiten Sie hieraus die Stirlingsche Beziehung ab.

Lösung: Aus $n! = n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} c_n$ folgt

$$\begin{aligned}\frac{c_n^2}{c_{2n}} &= \frac{(n!)^2}{n^{2n+1}e^{-2n}} \cdot \frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}e^{-2n}}{(2n)!} \\ &= \frac{(n!)^2\,\sqrt{2n}\;2^{2n}\;n^{2n}}{(2n)!\;n\cdot n^{2n}} = \sqrt{2}\cdot\frac{(n!)^2\;2^{2n}}{(2n)!\;\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\lim \frac{c_n^2}{c_{2n}} = \frac{(\lim c_n)^2}{\lim c_{2n}} = \frac{c^2}{c} = c$$

(man beachte, dass $c \neq 0$ wegen $c = e^{\gamma}$). Um c hieraus zu berechnen, benutzen wir das Wallis'sche Produkt:

$$
\begin{aligned}
\frac{\pi}{2} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n-2)\cdot(2n-2)\cdot 2n\cdot 2n}{1\cdot 1\cdot 3\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n-2)\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)\cdot\sqrt{2n+1}}\right)^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^2\cdot 4^2\cdot \ldots \cdot (2n-2)^2\cdot (2n)^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)\cdot 2n\cdot\sqrt{2n+1}}\right)^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^{2n}\cdot (n!)^2}{(2n)!\cdot\sqrt{2n+1}}\right)^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^{2n}\cdot (n!)^2\sqrt{2}}{(2n)!\cdot\sqrt{n}}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2n+1}}\right)^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{c_n^2}{c_{2n}}\right)^2 \frac{n}{2(2n+1)} = \frac{c^2}{4}.
\end{aligned}
$$

Umstellen der Gleichung $\frac{c^2}{4} = \frac{\pi}{2}$ nach c liefert $c = \sqrt{2\pi}$.
Aus der Beziehung

$$n! = n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} c_n$$

folgt nun also

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}} = \sqrt{2\pi},$$

d.h. die Strilingsche Formel.

Aufgabe T6

Mit Hilfe des Wallis'schen Produktes und der Aufgabe 4 aus dem Tutorium 4 ist zu zeigen, dass

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$

Lösung: Wir stellen mit Hilfe von Aufgabe (4) aus Tutorium 4 $\Gamma(\frac{1}{2})$ auf zweierlei weise dar:

$$
\begin{aligned}
\Gamma(\frac{1}{2}) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!\sqrt{n}}{\frac{1}{2}\cdot(1+\frac{1}{2})(2+\frac{1}{2})\cdot\ldots\cdot(n+\frac{1}{2})}\,, \\
\Gamma(\frac{1}{2}) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!\sqrt{n}}{(1-\frac{1}{2})(2-\frac{1}{2})\cdot\ldots\cdot(n-\frac{1}{2})(n+\frac{1}{2})}
\end{aligned}
$$

Multiplikation ergibt

$$
\begin{aligned}
\Gamma(\frac{1}{2})^2 &= \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+\frac{1}{2}} \cdot \frac{(n!)^2}{(1-\frac{1}{4})(4-\frac{1}{4})(9-\frac{1}{4})\cdot\ldots\cdot(n^2+\frac{1}{4})} \\
&= 2\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n} \frac{k^2}{k^2-\frac{1}{4}} = 2\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{4k^2}{4k^2-1} = \pi
\end{aligned}
$$

(Wallis'sches Produkt). Folglich ist

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$

Mit Hilfe dieses Wertes läßt sich z.B. das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

berechnen: Die Substitution $x = t^{\frac{1}{2}}$, $dx = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} dt$ liefert

$$\int_{\varepsilon}^{R} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{\varepsilon^2}^{R^2} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt \ ,$$

und durch Grenzübergang $\varepsilon \searrow 0$ und $R \to \infty$

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{0}^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \frac{1}{2}\, \Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}.$$