Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Nada Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
WS 2009/2010
12.11.2009

4. Tutorium zur „Analysis II“

Die Eulersche Γ-Funktion

Eine der wichtigsten Funktionen der Analysis ist die für $x > 0$ durch

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

definierte Eulersche Γ-Funktion.

Aufgabe T1

Zeigen Sie, dass dieses Integral als uneigentliches Riemann-Integral existiert.

Lösung:

Der Integrand weist im Punkt 0 eine Unendlichkeitsstelle auf, und auch das Integrationsintervall ist unendlich. Das Integral ist also im zweifachen Sinn uneigentlich, und wir haben zu zeigen, dass

$$\lim_{R\to\infty} \lim_{\epsilon\searrow 0} \int_\epsilon^R t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

existiert.

Für alle $t > 0$ und $x > 0$ ist

$$0 < t^{x-1} e^{-t} < t^{x-1} ,$$

und da das uneigentliche Integral

$$\int_0^R t^{x-1}\, dt = \lim_{\epsilon\searrow 0} \int_\epsilon^R t^{x-1}\, dt = \lim_{\epsilon\searrow 0} \frac{t^x}{x}\bigg|_\epsilon^R = \frac{R^x}{R}$$

für alle $x > 0$ existiert, können wir abschätzen:

$$\int_\epsilon^R t^{x-1} e^{-t}\, dt \le \int_\epsilon^R t^{x-1}\, dt \le \int_0^R t^{x-1}\, dt = \frac{R^x}{R} .$$

Für $\epsilon \searrow 0$ wächst die linke Seite dieser Ungleichung monoton und bleibt dabei nach oben beschränkt. Also existiert der Grenzwert für $\epsilon \searrow 0$. Für die Behandlung der zweiten „uneigentlichen Stelle“ ∞ überlegen wir uns:

$$\forall x\ \exists t_0 > 0 \text{ so, dass } 0 < t^{x-1} e^{-t} < t^{-2} \text{ für } t > t_0. \qquad (1)$$

Hierfür genügt es zu zeigen, dass

$$\lim_{t\to\infty} t^{x+1}e^{-t} = 0 \text{ für jedes } x > 0\ . \tag{2}$$

Zeigen zuerst (2) und wählen dazu ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq x+1$. Dann ist $t^{x+1}e^{-t} \leq t^n e^{-t}$ für alle $t \geq 1$, und es genügt zu zeigen, dass

$$\lim_{t\to\infty} t^n e^{-t} = 0 \text{ für jedes } n \in \mathbb{N}\ .$$

Dies folgt z.B. leicht aus der l'Hôspitalschen Regel für den Punkt ∞:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^n}{e^t} = \lim_{t\to\infty} \frac{nt^{n-1}}{e^t} = \cdots = \lim_{t\to\infty} \frac{n!}{e^t} = 0\ .$$

Damit ist (2) gezeigt, und (1) erhält man wie folgt: Nach Definition des Grenzwertes gilt für jedes feste $x > 0$

$$\forall x\ \exists t_0 > 0\ :\ t^{x+1}e^{-t} < \epsilon \text{ für } t > t_0\ .$$

Wählen wir speziell $\epsilon = 1$ und erhalten

$$t^{x+1}e^{-t} < 1 \ \text{ bzw. } \ t^{x+1}e^{-t} < t^{-2} \text{ für } t > t_0\ .$$

Da das Integral

$$\int_1^\infty t^{-2}\,dt = \lim_{R\to\infty} \int_1^R t^{-2}\,dt = \lim_{R\to\infty} \left.\frac{t^{-1}}{-1}\right|_1^R = 1$$

existiert, erhält man wie oben auch die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{R\to\infty} \int_1^R t^{x-1}e^{-t}\,dt\ .$$

Aufgabe T2

Beweisen Sie die Funktionalgleichung für die Γ-Funktion:

$$x\Gamma(x) = \Gamma(x+1) \qquad \text{für alle } x > 0$$

und schließen Sie hieraus auf $\Gamma(n+1) = n!$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösung: Partielle Integration ergibt

$$\begin{aligned}\int_\epsilon^R t^x e^{-t}\,dt &= -t^x e^{-t}\big|_\epsilon^R + \int_\epsilon^R x t^{x-1}e^{-t}\,dt \\ &= \epsilon^x e^{-\epsilon} - R^x e^{-R} + \int_\epsilon^R x t^{x-1} e^{-t}\,dt\ .\end{aligned}$$

Grenzübergang $\epsilon \searrow 0$ und $R \to \infty$ ergibt (die Existenz aller benötigten Grenzwerte wurden in (1) gezeigt)

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \text{ für alle } x > 0\ .$$

Insbesondere ist für $n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-2) = \cdots = n!\,\Gamma(1)\ .$$

Für $\Gamma(1)$ finden wir:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-t}\,dt = \lim_{R\to\infty} (-e^{-t})\Big|_0^R = 1\ .$$

Definition:
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein (endliches oder unendliches) Intervall. Eine Funktion $f : I \to \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ heißt logarithmisch konvex, wenn die Funktion $\ln(f) : I \to \mathbb{R}$ konvex ist.

Aufgabe T3

Zeigen Sie, dass die Funktion Γ logarithmisch konvex ist.

Hinweis: Benutzen Sie die Hölder-Ungleichung: Für $p,\, q > 1$ mit $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ ist

$$\left| \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \right| \le \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q\, dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Lösung: Konvexitität einer Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bedeutet

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

für alle $x, y \in [a,b]$ und $\lambda \in [0,1]$. Die Funktion $f : I \to \{x \in \mathbb{R} \;:\; x > 0\}$ ist daher logarithmisch konvex genau dann, wenn

$$(\ln f)(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda (\ln f)(x) + (1-\lambda)(\ln f)(y)$$

bzw. nach „Entlogarithmieren“

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le f(x)^{\lambda} f(y)^{1-\lambda}$$

für alle $x, y \in I$ und $\lambda \in [0,1]$. Nun zur Lösung der Aufgabe: Wir wollen für alle $\lambda \in (0,1)$ (für $\lambda = 0$ oder $\lambda = 1$ ist die Behauptung klar) zeigen, dass

$$\Gamma(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \Gamma(x)^{\lambda} \Gamma(y)^{1-\lambda}\,.$$

Mit $\lambda = \frac{1}{p}$ und $1 - \lambda = \frac{1}{q}$ geht dies über in eine Form, die an die Hölderungleichung erinnert:

$$\Gamma\left(\frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y\right) \le \Gamma(x)^{\frac{1}{p}} \Gamma(y)^{\frac{1}{q}}$$

bzw.

$$\int_0^\infty t^{\frac{x}{p}+\frac{y}{q}-1} e^{-t}\, dt \le \left(\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^\infty t^{y-1} e^{-t}\, dt \right)^{\frac{1}{q}}\,. \tag{1}$$

Um die Hölderungleichung direkt anwenden zu können, sollten wir versuchen f bzw. g wie folgt zu wählen

$$f(t)^p = t^{x-1} e^{-t} \text{ und } g(t)^q = t^{y-1} e^{-t}$$

bzw.

$$f(t)^p = t^{\frac{x}{p}-\frac{1}{p}} e^{-\frac{t}{p}} \text{ und } g(t)^q = t^{\frac{y}{q}-\frac{1}{q}} e^{-\frac{t}{q}}\,. \tag{2}$$

Mit dieser Wahl wird

$$f(t) g(t) = t^{\frac{x}{p}-\frac{1}{p}} e^{-\frac{t}{p}} t^{\frac{y}{q}-\frac{1}{q}} e^{-\frac{t}{q}} = t^{\frac{x}{p}+\frac{y}{q}-1} e^{-t}\,,$$

was mit dem Integranden der rechten Seite von (1) übereinstimmt. Damit ist klar, wie der eigentliche Beweis laufen sollte:

Sei $x, y > 0$ und $0 < \lambda < 1$. Wählen $p = \frac{1}{\lambda}$, $q = \frac{1}{1-\lambda}$ und definieren f, g wie in (1). Anwendung der Höldergleichung auf f, g liefert

$$\int_\epsilon^\infty t^{\frac{x}{p}+\frac{y}{q}-1} e^{-t}\, dt \le \left(\int_\epsilon^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\epsilon^\infty t^{y-1} e^{-t}\, dt\right)^{\frac{1}{q}} .$$

und nach Grenzübergang $\epsilon \searrow 0$, $R \to \infty$ folgt die Behauptung.

Durch die bislang gezeigten Eigenschaften ist die Γ-Funktion bereits vollständig charakterisiert. Genauer:

<u>Satz:</u> (Bohr)
Sei $F : \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} \to \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:

a) $F(1) = 1$.

b) $F(x+1) = x\, F(x) \quad$ für $x > 0$.

c) F ist logarithmisch konvex.

Dann gilt $F(x) = \Gamma(x)$ für alle $x > 0$.

<u>Beweis:</u>
Die Γ-Funktion genügt den Eigenschaften a) - c). Es genügt daher zu zeigen, dass eine Funktion F mit den Eigenschaften a) - c) eindeutig bestimmt ist.
Aus b) folgt:

$$F(x+n) = F(x) \cdot x \cdot (x+1) \cdot \dots \cdot (x+n-1)$$

für alle $x > 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Zusammen mit a) zeigt dies, dass $F(n+1) = n!$ ist und dass es genügt zu beweisen, dass $F(x)$ für $x \in (0,1)$ eindeutig bestimmt ist.

Sei nun also $x \in (0,1)$. Wegen $n + x = (1-x)n + x(n+1)$ folgt aus der logarithmischen Konvexität:

$$F(n+x) \le F(n)^{1-x} F(n+1)^x = F(n)^{1-x} F(n)^x\, n^x = (n-1)!\, n^x.$$

Aus $n + 1 = x(n+x) + (1-x)(n+1+x)$ folgt ebenso

$$n! = F(n+1) \le F(n+x)^x F(n+1+x)^{1-x} = F(n+x)\,(n+x)^{1-x}.$$

Kombination beider Ungleichungen liefert

$$n!\,(n+x)^{x-1} \le F(n+x) \le n!\, n^x$$

und weiter

$$a_n := \frac{n!\,(n+x)^{x-1}}{x(x+1)\cdot \dots \cdot (x+n-1)} \le F(x) \le \frac{(n-1)!\, n^x}{x(x+1)\cdot \dots \cdot (x+n-1)} =: b_n.$$

Da $\dfrac{b_n(x)}{a_n(x)} = \dfrac{(n+x)\, n^x}{n(n+x)^x}$ für $n \to \infty$ gegen 1 konvergiert, folgt

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!\, n^x}{x\,(x+1)\cdot \dots \cdot (x+n-1)} ,$$

d.h. F ist eindeutig bestimmt.

Aufgabe T4

Arbeiten Sie diesen Beweis durch und zeigen Sie anschließend, dass

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^x}{x(x+1)\cdot\dots\cdot(x+n)} \qquad \text{für alle } x > 0.$$

Lösung: Aus dem angegebenen Beweis wissen wir, dass

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!n^x}{x(x+1).\dots.(x+n-1)} \text{ für alle } x \in (0,1)\ .$$

Da außerdem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+x} = 1$$

ist, folgt

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n)} \text{ für alle } x \in (0,1)\ ,$$

dh. die für $x \in (0,1)$ gilt die Behauptung. Außerdem ist die Behauptung trivialerweise für $x = 1$ richtig. Wir müssen daher noch zeigen: Ist die Aussage für ein $x > 0$ richtig, so gilt sie auch für $y := x + 1$. Nun ist:

$$\begin{aligned}
\Gamma(y) &= \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1).\dots.(x+n)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^{y-1}}{y(y+1)\cdot\ldots\cdot(y+n-1)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^{y-1}}{y(y+1)\cdot\ldots\cdot(y+n-1)} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n}{y+n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^y}{y(y+1)\cdot\ldots\cdot(y+n)}\ .
\end{aligned}$$