Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Nada Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/2010
5.11.2009

3. Tutorium zur „Analysis II“

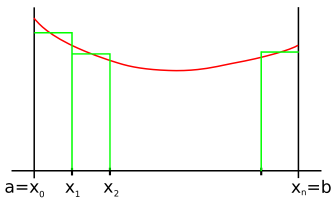
Numerische Integration

Bereits so einfache Funktionen wie $f(x) = \frac{1}{\ln(x)}$ oder $f(x) = e^{x^2}$ besitzen zwar eine Stammfunktion, die sich jedoch nicht mehr mit Hilfe elementarer Funktionen geschlossen darstellen läßt. Man ist daher in vielen Fällen darauf angewiesen, Integrale numerisch auszuwerten.

Aufgabe T1 (Rechteckregel)

Man ersetzt $\int_a^b f(x)\,dx$ näherungsweise durch

$$R_n(f) := \sum_{i=0}^{n-1} h\, f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) \qquad \text{mit } h = \frac{b-a}{n},\ x_i = a + h\, i.$$



Zeigen Sie: Ist f auf $[a,b]$ Riemann-integrierbar, so gilt

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - R_n(f)\right| \to 0 \qquad \text{für } h \to 0.$$

Ist f auf $[a,b]$ zweimal stetig differenzierbar, so gilt

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - R_n(f)\right| \le \frac{h^2}{24}(b-a) \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|.$$

Lösung: $R_n(f)$ ist nichts Anderes als eine spezielle Riemannsumme für f. Für Riemann-integrierbares f konvergiert daher $R_n(f)$ fr $n \to \infty$ bzw. $h \to 0$ gegen $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.
Die Fehlerabschätzung zeigen wir zunächst für den Fall eines nichtunterteilten Intervalls und setzen hieraus dann die allgemeine Formel zusammen. Wir betrachten also zunächst

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

für zweimal stetig differenzierbares f. Wegen

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \int_a^b \left(f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)\mathrm{d}x$$

liegt es nahe, die Taylorentwicklung von f an der Stelle $\frac{a+b}{2}$ zu betrachten. Da f zweimal stetig differenzierbar ist, gilt

$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{f'\left(\frac{a+b}{2}\right)}{1!}\left(\frac{a+b}{2} - x\right) + \frac{f''(\xi)}{2!}\left(\frac{a+b}{2} - x\right)^2 \tag{$*$}$$

mit einem ξ zwischen $\frac{a+b}{2}$ und x. Vorab bemerken wir, dass

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \left(\frac{a+b}{2} - x\right)\mathrm{d}x = 0\\
&\int_a^b \left(\frac{a+b}{2} - x\right)^2 \mathrm{d}x = \int_a^b \left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - (a+b)x + x^2\right)\mathrm{d}x\\
&\qquad = \left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 x - \frac{a+b}{2}x^2 + \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_a^b\\
&\qquad = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 (b-a) - \frac{a+b}{2}(b^2-a^2) + \frac{b^3-a^3}{3}\\
&\qquad = \frac{b-a}{12}(3a^2 + 6ab + 3b^2 - 6a^2 - 12ab - 6b^2 + 4a^2 + 4ab + 4b^2)\\
&\qquad = \frac{b-a}{12}(a^2 - 2ab + b^2) = \frac{(b-a)^3}{12}.
\end{aligned}$$

Nun ist also

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| &= \left|\int_a^b \left(f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)\mathrm{d}x\right|\\
&= \left|\int_a^b \left(f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2} - x\right)\right)\mathrm{d}x\right|\\
&\leq \int_a^b \left|f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2} - x\right)\right|\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Wegen $(*)$ ist

$$\begin{aligned}
\left|f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2} - x\right)\right| &= \left|\frac{f''(\xi)}{2!}\left(\frac{a+b}{2} - x\right)^2\right|\\
&\leq \frac{1}{2}\sup_{\xi\in[a,b]}|f''(\xi)|\left(\frac{a+b}{2} - x\right)^2,
\end{aligned}$$

und wir können weiter abschätzen:

$$\left|\int_a^b \left(f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)\mathrm{d}x\right| \leq \frac{1}{2}\sup_\xi |f''(\xi)| \int_a^b \left(\frac{a+b}{2} - x\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{24}\sup_\xi |f''(\xi)|(b-a)^3.$$

Wir kommen zum Fall $n > 1$ und wenden die bereits erhaltene Abschätzung auf jedes Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ einzeln an:

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - R_n(f)\right| &= \left|\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x - \sum_{i=0}^{n-1} hf\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)\right| \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x - hf\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)\right| \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{24}h^3 \sup_{\xi\in[x_i,x_{i+1}]}|f''(\xi)| \\
&\leq \frac{1}{24}h^3 \sup_{\xi\in[x_i,x_{i+1}]}|f''(\xi)|\sum_{i=0}^{n-1}1 \\
&= \frac{1}{24}h^2 \sup_{\xi\in[a,b]}|f''(\xi)|.
\end{aligned}$$

Ein Nachteil der Rechteckregel ist, dass bei Schnittstellenhalbierung jedesmal alle Funktionswerte neu berechnet werden müssen. Diesen Nachteil vermeidet die Trapezregel.

Aufgabe T2 (Trapezreel)

Man ersetzt $\int_a^b f(x)\,dx$ näherungsweise durch

$$T_n(f) := h\left(\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(x_n)\right).$$

Deuten Sie dies geometrisch und zeigen Sie: Für Riemann-integrierbares f gilt

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - T_n(f)\right| \to 0 \qquad \text{für } h \to 0,$$

und für zweimal stetig differenzierbares f gilt

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - T_n(f)\right| \leq \frac{h^2}{12}(b-a)\sup_{x\in[a,b]}|f''(x)|.$$

Lösung: Wegen

$$\begin{aligned}
T_n(f) = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}h &= \left(\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(x_n)\right)h \\
&= f(x_0)\frac{h}{2} + f(x_1)h + \ldots + f(x_{n-1})h + f(x_n)\frac{h}{2}
\end{aligned}$$

kann man auch $T_n(f)$ als Riemannsumme von f bezüglich der Zerlegung

$$a = x_0 < \frac{x_0+x_1}{2} < \frac{x_1+x_2}{2} < \ldots < \frac{x_{n-1}+x_n}{2} < x_n = b$$

mit den Zwischenstellen $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ auffassen. Für Riemann-integrierbares f konvergiert daher $T_n(f)$ gegen $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Die Fehlerabschätzung zeigen wir zunächst wieder für ein nichtunterteiltes Intervall. Die Rechnungen werden besonders einfach, wenn wir zunächst nur Intervalle der Form $[-r, r]$ mit $r > 0$ betrachten. Mit $n = 1$ und $[a, b] = [-r, r]$ haben wir also abzuschätzen:

$$\int_{-r}^r g(t)\mathrm{d}t - 2r\frac{g(-r)+g(r)}{2} = \int_{-r}^r g(t)\mathrm{d}t - r(g(-r)+g(r))$$

für zweimal stetig differenzierbares g. Mit zweifacher partieller Integration erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{-r}^{r} g(t)\mathrm{d}t &= tg(t)|_{-r}^{r} - \int_{-r}^{r} tg'(t)\mathrm{d}t \\ &= r(g(-r)+g(r)) - \left(\frac{t^2}{2}g'(t)\Big|_{-r}^{r} - \int_{-r}^{r} \frac{t^2}{2}g''(t)\mathrm{d}t \right).\end{aligned}$$

Der erste Summand ist gerade $T_1(g)$. Allerdings stört noch der 2. Summand, in dem die *erste* Ableitung vorkommt. Dies lässt sich mit einem kleinen Trick vermeiden: wir integrieren $\int_{-r}^{r} tg'(t)\mathrm{d}t$ partiell, d.h. wir wählen $u'(t) = t$ und $v(t) = g'(t)$, als Stammfunktion von u' wählen wir jedoch nicht $u(t) = t^2/2$, sondern $u(t) = t^2/2 - r^2/2$. Dann wird

$$\begin{aligned} int_{-r}^{r} g(t)\mathrm{d}t &= tg(t)|_{-r}^{r} - \int_{-r}^{r} tg'(t)\mathrm{d}t \\ &= r(g(-r)+g(r)) - \left(\frac{1}{2}(t^2-r^2)g'(t)\Big|_{-r}^{r} - \frac{1}{2}\int_{-r}^{r} (t^2-r^2)g''(t)\mathrm{d}t \right) \\ &= r(g(-r)+g(r)) - \frac{1}{2}\int_{-r}^{r} (r^2-t^2)g''(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit von g'' und wegen $r^2 - t^2 \geq 0$ auf $[-r, r]$ lässt sich der verallgemeinerte Mittelwertsatz der Integralrechnung anwenden. Es gibt also ein $\xi \in [-r, r]$ so, dass

$$\int_{-r}^{r} g(t)\mathrm{d}t - r(g(-r)+g(r)) = -\frac{1}{2}g''(\xi)\int_{-r}^{r} (r^2-t^2)\mathrm{d}t$$

ist. Mit

$$\int_{-r}^{r} (r^2-t^2)\mathrm{d}t = r^2t - \frac{t^3}{3}\Big|_{-r}^{r} = \frac{4}{3}r^3$$

erhalten wir schließlich

$$\int_{-r}^{r} g(t)\mathrm{d}t - r(g(-r)+g(r)) = -\frac{2}{3}g''(\xi)r^3. \tag{$*$}$$

Nun übertragen wir alles auf Intervalle $[a, b] \neq [-r, r]$ (bleiben aber beim Fall $n = 1$). Um

$$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x - (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{$**$}$$

auf $a = -r$, $b = r$ zurückzuführen, substituieren wir

$$t = \frac{2r}{b-a}(x-a) - r \qquad \text{bzw.} \qquad x = \frac{b-a}{2r}t + \frac{a+b}{2}$$

und setzen

$$g(t) := f\left(\frac{b-a}{2r}t + \frac{a+b}{2}\right) \qquad (= f(x)).$$

Aus $(**)$ wird dann

$$\begin{aligned}\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x - (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} &= \int_{-r}^{r} f\left(\frac{b-a}{2r}t + \frac{a+b}{2}\right)\frac{b-a}{2r}\mathrm{d}t - \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) \\ &= \frac{b-a}{2r}\int_{-r}^{r} g(t)\mathrm{d}t - r(g(-r)+g(r)),\end{aligned}$$

und aus der bereits abgeleiteten Beziehung $(*)$ folgt

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} = \frac{b-a}{2r}\left(-\frac{2}{3}r^3\right) g''(\xi). \qquad (***)$$

Nun ist aber

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}f(x(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\,\frac{b-a}{2r}$$

sowie analog

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{b-a}{2r}\right)^2,$$

d.h. mit einem $\eta \in [a,b]$ geht $(***)$ über in

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} = \frac{b-a}{2r}\left(-\frac{2}{3}r^3\right)\left(\frac{b-a}{2r}\right)^2 f''(\eta) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta).$$

Das liefert die Abschätzung

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}\right| \leq \frac{(b-a)^3}{12} \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|,$$

aus der wir wie in Aufgabe 1 auch die Behauptung im Fall $n > 1$ erhalten.