Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Nada Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/2010
29.10.2009

2. Tutorium zur „Analysis II“

Zum Satz von Taylor

Mit Hilfe des Riemann-Integrals läßt sich eine weitere Darstellung des Restgliedes im Satz von Taylor angeben.

Aufgabe T1

Zeigen Sie folgende Version des Satzes von Taylor:

Sei f in $[a,b]$ $(n+1)$-mal stetig differenzierbar. Dann gilt für alle x, $x_0 \in [a,b]$:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x_0,x)$$

mit

$$\begin{aligned} R_n(x_0,x) &:= \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt \\ &= \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-s)^n f^{(n+1)}(x_0+s(x-x_0))\,ds. \end{aligned}$$

Lösung:

Wir überlegen uns zunächst die erste der angegebenen Darstellungen des Restgliedes. Der Beweis erfolgt mittels vollständiger Induktion. Für $n=0$ lautet die zu beweisende Aussage:

$$f(x) - f(x_0) = R_0(x_0,x) = \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt.$$

Dies ist aber gerade die Aussage des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechung. Für $n=0$ ist die Behauptung also richtig. Wir nehmen nun an, daß die Aussage für ein festes n richtig ist. Für jede $n+2$ mal auf $[a,b]$ stetig differenzierbare Funktion f ist dann

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt. \qquad (1)$$

Die Funktionen $x \mapsto (x-t)^n$ und $f^{(n+1)}$ sind stetig differenzierbar. Wir können daher das Integral in (1) mit partieller Integration umformen, wobei wir

$$u'(t) = (x-t)^n\ ,\ v(t) = f^{(n+1)}(t)$$

bzw.

$$u(t) = -\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\ ,\ v'(t) = f^{(n+2)}(t)$$

wählen. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned}
R_n(x_0,x) &= \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt \\
&= -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)n!}f^{(n+1)}(t)\Big|_{x_0}^{x} - \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} -\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}f^{(n+2)}(t)\,dt \\
&= \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0) + \frac{1}{(n+1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n+1}f^{(n+2)}(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Zusammengefaßt ist also

$$\begin{aligned}
f(x) = f(x_0) &+ \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \\
&+ \frac{1}{(n+1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n+1}f^{(n+2)}(t)\,dt\ ,
\end{aligned}$$

d.h. die Behauptung gilt für $n+1$.
In dieser Schreibweise läßt sich die Taylorsche Formel also auch auffassen als eine Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung.
Für die zweite Form der Darstellung des Restgliedes als Integral substituieren wir in

$$R_n(x_0,x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$$

t durch $x_0 + s(x-x_0)$. Dann ist $\frac{dt}{ds} = (x-x_0)$, d.h. wir formal dt durch $(x-x_0)ds$ zu ersetzen, und wenn t von x_0 zu x läuft, so läuft s gerade von 0 bis 1. Wir erhalten also

$$\begin{aligned}
R_n(x_0,x) &= \frac{1}{n!}\int_0^1 (x-(x_0+s(x-x_0)))^n f^{(n+1)}(x_0+s(x-x_0))(x-x_0)\,ds \\
&= \frac{1}{n!}\int_0^1 (x-x_0)^n(1-s)^n f^{(n+1)}(x_0+s(x-x_0))(x-x_0)\,ds \\
&= \frac{(x-x_0)^n}{n!}\int_0^1 (1-s)^n f^{(n+1)}(x_0+s(x-x_0))\,ds
\end{aligned}$$

Aufgabe T2

Leiten Sie hieraus die Lagrangesche Darstellung des Restgliedes ab:

$$R_n(x_0,x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Lösung:

Das Restglied nach Lagrange ergibt sich, wenn man den erweiterten Mittelwertsatz der Integralrechnung (= Satz 3 aus 8.6) auf die Integraldarstellung des Restgliedes anwendet: Es ist $(x-t)^n \geq 0$ und $f^{(n+1)}$ ist stetig. Also gibt es ein $\xi \in [x_0,x]$ mit

$$\begin{aligned}
R_n(x_0,x) &= \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt \\
&= \frac{f^{(n+1)(\xi)}}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n\,dt = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\Big|_{x_0}^{x}\ ,
\end{aligned}$$

also

$$R_n(x_0, x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \; .$$

Aufgabe T3

Zeigen Sie für alle $0 \leq x < 1$ und $n \geq \alpha > 0$ die Abschätzungen

$$\frac{1}{1 + \left|\binom{\alpha-1}{n}\right| x^n} \left(\binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1} x + \ldots + \binom{\alpha}{n} x^n + \left|\binom{\alpha-1}{n}\right| x^n \right)$$
$$\leq (1+x)^\alpha \leq$$
$$\frac{1}{1 - \left|\binom{\alpha-1}{n}\right| x^n} \left(\binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1} x + \ldots + \binom{\alpha}{n} x^n - \left|\binom{\alpha-1}{n}\right| x^n \right) .$$

Lösung:

Für $f(x) = (1+x)^\alpha$ ist

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \alpha(\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha - (n-1))(1+x)^{\alpha-n} \\ &= n! \, \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha-(n-1))}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} (1+x)^{\alpha-n} = n! \binom{\alpha}{n} (1+x)^{\alpha-1} \end{aligned}$$

und daher

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \binom{\alpha}{n} .$$

Mit Aufgabe 1 für $x_0 = 0$ erhalten wir daher

$$(1+x)^\alpha = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1} x + \ldots + \binom{\alpha}{n} x^n + R_n(x)$$

mit

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt \\ &= (n+1) \binom{\alpha}{n+1} \int_0^x (x-t)^n (1+t)^{\alpha-n-1}\, dt \end{aligned}$$

Wegen $|x-t| \leq x$ und $(1+t)^{-n} \leq 1$ können wir dies abschätzen:

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &\leq (n+1) \left| \binom{\alpha}{n+1} \right| \int_0^x x^n (1+t)^{\alpha-1}\, dt \\ &= (n+1) \left| \binom{\alpha}{n+1} \right| x^n \int_0^x (1+t)^{\alpha-1}\, dt \\ &= (n+1) \left| \binom{\alpha}{n+1} \right| x^n \frac{(1+t)^\alpha}{\alpha} \Big|_0^x \\ &= \frac{(n+1)}{\alpha} \left| \binom{\alpha}{n+1} \right| x^n \left((1+x)^\alpha - 1 \right) \\ &= \left| \binom{\alpha-1}{n} \right| x^n \left((1+x)^\alpha - 1 \right) \; . \end{aligned}$$

Insbesondere ist also

$$R_n(x) = (1+x)^\alpha - \binom{\alpha}{0} - \binom{\alpha}{1} x - \ldots - \binom{\alpha}{n} x^n \leq \left| \binom{\alpha-1}{n} \right| x^n \left((1+x)^\alpha - 1 \right)$$

bzw.

$$(1+x)^\alpha - \binom{\alpha}{0} - \binom{\alpha}{1}x - \ldots - \binom{\alpha}{n}x^n \le \left|\binom{\alpha-1}{n}\right| x^n (1+x)^\alpha - \left|\binom{\alpha-1}{n}\right| x^n$$

umstellen und zusammenfassen ergibt:

$$(1+x)^\alpha \left(1 - \left|\binom{\alpha-1}{n}\right| x^n\right) \le \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \ldots + \binom{\alpha}{n}x^n - \left|\binom{\alpha-1}{n}\right| x^n \tag{1}$$

Wir überlegen uns, daß $\left|\binom{\alpha-1}{n}\right| < 1$. Dazu schreiben wir α als $r+\beta$ mit $r \in \mathbb{Z}$, $r \ge 0$ und $\beta \in (0,1)$. Wir erhalten für $n \ge \alpha$

$$\begin{aligned} \left|\binom{\alpha-1}{n}\right| &= \left|\frac{(r-1+\beta)(r-2+\beta)\ldots(1+\beta)\beta(-1+\beta)(-2+\beta)\ldots(r-n+\beta)}{n!}\right| \\ &= \frac{r-1+\beta}{r}\,\frac{r-2+\beta}{r}\ldots\frac{1+\beta}{2}\,\frac{\beta}{1}\,\frac{1-\beta}{r+1}\,\frac{2-\beta}{r+2}\ldots\frac{n-r-\beta}{n}\ . \end{aligned}$$

Jeder einzelne Bruch ist < 1.
Insbesondere ist auch

$$\left|\binom{\alpha-1}{n}\right| < 1 \text{ für alle } x \in [0,1)\ .$$

Wir können in (1) also durch $1 - \left|\binom{\alpha-1}{n}\right|$ dividieren und erhalten die Abschätzung von $(1+x)^\alpha$ nach oben.
Analog folgt aus:

$$-R_n(x) = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \ldots + \binom{\alpha}{n}x^n - (1+x)^\alpha \le \left|\binom{\alpha-1}{n}\right| x^n\left((1+x)^\alpha - 1\right)$$

die angebene Abschätzung nach unten.