Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Nada Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/2010
22.10.2009

1. Tutorium zur „Analysis II“

Die Menge der Riemann-integrierbaren Funktionen

Sei $R[a,b]$ die Menge der auf dem Intervall $[a,b]$ Riemann-integrierbaren Funktionen.

Aufgabe T1

Für je zwei Funktionen $f, g \in R[a,b]$ erklären wir ihre Summe $f+g$ bzw. ihr Produkt fg durch

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x) \quad \text{bzw.} \quad (fg)(x) := f(x)g(x) \quad \text{für alle } x \in [a,b].$$

Zeigen Sie: $f+g$ und fg gehören wieder zu $R[a,b]$.

Lösung: Sei Z_n eine Folge von Zerlegungen von $[a,b]$ mit $|Z_n| \to 0$ für $n \to \infty$, und für jedes n sei $\xi^{(n)}$ ein Zwischenvektor zu Z_n. Wir müssen zeigen, dass die Folgen $(S(Z_n, \xi^{(n)}, f+g))$ und $(S(Z_n, \xi^{(n)}, fg))$ konvergieren.
Für die Summe $f+g$ haben wir

$$\begin{aligned} S(Z_n, \xi^{(n)}, f+g) &= \sum_{i=0}^{n-1} (f+g)(\xi_i^{(n)})\Delta x_i \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i^{(n)})\Delta x_i + \sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i^{(n)})\Delta x_i \\ &= S(Z_n, \xi^{(n)}, f) + S(Z_n, \xi^{(n)}, g) \end{aligned}$$

Die rechte Seite konvergiert gegen $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$, also konvergiert auch die linke Seite gegen $\int_a^b (f+g)(x)\mathrm{d}x$. Insbesondere erhalten wir

$$\int_a^b (f+g)(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

Zum Produkt fg: wir arbeiten mit dem Lebesgueschen Integrabilitätskriterium. Sind beide Funktionen in einem Punkt $x_0 \in [a,b]$ stetig, so ist es auch ihr Produkt. Für die Menge $\Delta(fg)$ der Unstetigkeitsstellen von fg gilt daher

$$\Delta(fg) \subseteq \Delta(f) \cup \Delta(g).$$

Da f, g Riemannintegrierbar, sind $\Delta(f)$ und $\Delta(g)$ Nullmengen (Satz 1 aus 8.4). Dann ist auch $\Delta(f) \cup \Delta(g)$ Nullmenge (Lemma 1 (c) aus 8.4), und als Teilmenge einer Nullmenge ist $\Delta(fg)$ Nullmenge. Wieder nach Satz 1 aus 8.4 heißt dies: $fg \in R[a,b]$.

Aufgabe T2

Eine Funktion $d : R[a,b] \times R[a,b] \to \mathbb{R}$ sei erklärt durch

$$d(f,g) := \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

Zeigen Sie: d ist eine Metrik auf $R[a,b]$ und der metrische Raum $(R[a,b], d)$ ist vollständig.

Lösung: Die Eigenschaften

$$d(f,g) \geq 0, \qquad d(f,g) = 0 \iff f = g, \qquad d(f,g) = d(g,f)$$

einer Metrik sind völlig offensichtlich. Für die Dreiecksungleichung beachte man, dass für beliebige $f, g, h \in R[a,b]$ und $x \in [a,b]$ zunächst gilt

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|$$

Hieraus bekommt man

$$\begin{aligned}\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)| &\leq \sup_{x\in[a,b]} (|f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|)\\ &\leq \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - h(x)| + \sup_{x\in[a,b]} |h(x) - g(x)|,\end{aligned}$$

also

$$d(f,g) \leq d(f,h) + d(h,g).$$

Wir zeigen noch die Vollständigkeit von $(R[a,b], d)$. Sei $(f_n) \in R[a,b]$ eine Fundamentalfolge, d.h.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n, m \geq N) : \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Für jedes $x \in [a,b]$ gilt dann offenbar auch

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n, m \geq N) : \ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \tag{1}$$

d.h. $(f_n(x))$ ist Fundamentalfolge in $\mathbb{R}$. Da $\mathbb{R}$ vollständig ist, konvergiert die Folge $(f_n(x))$ für jedes x, und ihren Grenzwert bezeichnen wir mit $f(x)$. Hierdurch wird eine Funktion f auf $[a,b]$ festgelegt.

Wir zeigen nun:

(a) Die Folge (f_n) konvergiert in der Metrik d gegen f.

(b) f ist Riemann-integrierbar, d.h. f gehört selbst zu $R[a,b]$.

zu (a) Lassen wir in (1) m gegen unendlich steben ((1) gilt ja für alle $m \geq n$), so erhalten wir

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)(\forall x \in [a,b]) \ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Dann gilt aber auch

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N) \ \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

d.h. die Folge (f_n) strebt gegen f bzgl. d.

zu (b) Sei (Z_n) eine Folge von Zerlegungen von $[a,b]$ mit $|Z_n| \to 0$ und für jedes n sei $\xi^{(n)}$ ein Zwischenvektor zu Z_n. Wir zeigen, dass dann die Folge $(S(Z_n, \xi^{(n)}, f))$ eine Fundamentalfolge in $\mathbb{R}$ ist. Dazu vermerken wir, dass für alle m, n und r gilt

$$\begin{aligned}
&|S(Z_n, \xi^{(n)}, f) - S(Z_m, \xi^{(m)}, f)| \\
&= |S(Z_n, \xi^{(n)}, f - f_r) - S(Z_m, \xi^{(m)}, f - f_r) + S(Z_n, \xi^{(n)}, f_r) - S(Z_m, \xi^{(m)}, f_r)| \\
&\leq |S(Z_n, \xi^{(n)}, f - f_r)| + |S(Z_m, \xi^{(m)}, f - f_r)| + |S(Z_n, \xi^{(n)}, f_r) - S(Z_m, \xi^{(m)}, f_r)| \\
&\leq 2 \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - f_r(x)|(b-a) + |S(Z_n, \xi^{(n)}, f_r) - S(Z_m, \xi^{(m)}, f_r)| \\
&= 2d(f, f_r)(b-a) + |S(Z_n, \xi^{(n)}, f_r) - S(Z_m, \xi^{(m)}, f_r)|
\end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir wählen ein r so, dass

$$2d(f, f_r)(b-a) < \frac{\varepsilon}{2}$$

(dies ist wegen Aussage (a) möglich). Zu diesem r wählen wir ein N so, dass für alle $n, m \geq N$ gilt

$$|S(Z_n, \xi^{(n)}, f_r) - S(Z_m, \xi^{(m)}, f_r)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

(dies ist möglich, da f_r Riemann-integrierbar ist und daher die Folge $(S(Z_n, \xi^{(n)}, f_r))$ konvergiert).
Für alle $n, m \geq N$ gilt also

$$|S(Z_n, \xi^{(n)}, f) - S(Z_m, \xi^{(m)}, f)| < \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben war, ist $(S(Z_n, \xi^{(n)}, f))$ eine Fundamentalfolge. Diese konvergiert, da $\mathbb{R}$ vollständig ist. Also ist $f \in R[a,b]$.

Aufgabe T3

Zeigen Sie die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung für Riemann-integrierbare Funktionen f, g:

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \left(\int_a^b f(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Lösung: Seien f, g Riemann-integrierbar auf $[a,b]$. Dann ist wegen Aufgabe 1 auch das Produkt fg Riemann-integrierbar, d.h. das Integral

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

ist wohldefiniert. Wir bezeichnen dieses Integral mit $\langle f, g \rangle$. Man überlegt sich leicht (siehe Vorlesung), dass

$$\begin{aligned}
\langle \alpha f + \beta g, h \rangle &= \alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle \\
\langle f, g \rangle &= \langle g, f \rangle \\
\langle f, f \rangle &\geq 0
\end{aligned}$$

für alle $f, g, h \in R[a,b]$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt. Der Ausdruck $\langle f, g \rangle$ definiert also *fast* ein Skalarprodukt auf $R[a,b]$. Die einzige Eigenschaft eines Skalarprodukts, welche *nicht* gilt, ist

$$\langle f, f \rangle = 0 \implies f \equiv 0$$

Ein Beispiel wäre

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = \frac{a+b}{2} \\ 0 & x \in [a,b] \setminus \left\{ \frac{a+b}{2} \right\} \end{cases}$$

Trotzdem bleibt die bekannte Cauchy-Schwarz-Ungleichung richtig: Für beliebige $f, g \in R[a,b]$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ erhält man:

$$0 \leq \langle f + \lambda g, f + \lambda g \rangle = \langle f, f \rangle + 2\lambda \langle f, g \rangle + \lambda^2 \langle g, g \rangle. \tag{$*$}$$

Wir betrachten die quadratische Funktion

$$h(\lambda) = \langle f, f \rangle + 2\lambda \langle f, g \rangle + \lambda^2 \langle g, g \rangle.$$

Aus $(*)$ wissen wir, dass diese Funktion höchstens eine reelle Nullstelle besitzt. Hieraus folgt leicht die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung (Diskriminante der Gleichung betrachten).