Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Nada Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/2010
03.02.2010

12. Tutorium zur „Analysis II“

Wegintegrale

Aufgabe T1

Sei $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)^T : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ein Weg. Zeigen Sie: γ ist genau dann rektifizierbar, wenn jede Komponente $\gamma_k : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion von beschränkter Variation ist.

Lösung:

Sei $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ein Weg und $Z = \{t_0, \ldots, t_r\}$ eine beliebige Zerlegung von $[a, b]$, d.h. $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_r = b$. Dann ist

$$L(\gamma, Z) = \sum_{i=0}^{r-1} \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\| = \sum_{i=0}^{r-1} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |\gamma_k(t_{i+1}) - \gamma_k(t_i)|^2}. \tag{1}$$

Folglich (und offensichtlich) ist also für jedes $k = 1, \ldots, n$:

$$\sum_{i=0}^{r-1} |\gamma_k(t_{i+1}) - \gamma_k(t_i)| \leq L(\gamma, Z).$$

Das heißt aber gerade, dass für jedes k gilt

$$V(\gamma_k, Z) \leq V(\gamma, Z).$$

Also ist jedes γ_k von beschränkter Variation, wenn γ rektifizierbar ist.
Andererseits folgt aus (1) und aus der bekannten Abschätzung

$$\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2} \leq |a_1| + \ldots + |a_n|$$

(die man z.B. durch Quadrieren einsieht), dass

$$L(\gamma, Z) \leq \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{k=1}^{n} |\gamma_k(t_{i+1}) - \gamma_k(t_i)| = \sum_{k=1}^{n} V(\gamma_k, Z). \tag{2}$$

Sind also alle γ_k von beschränkter Variation, so ist γ rektifizierbar.

Aufgabe T2

Beweisen Sie Satz 1 aus Abschnitt 11.4 der Vorlesung: Ist $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ein rektifizierbarer Weg mit zugehöriger Kurve $\Gamma = \gamma[a, b]$, und ist $f : \Gamma \to \mathbb{R}^n$ stetig, so existiert das Wegintegral $\int_\gamma f \mathrm{d}x$.

Lösung:
Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ rektifizierbar, Γ die zugehörige Kurve und $f : \Gamma \to \mathbb{R}^n$ stetig. Die Komponenten von γ bzw. f seien $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ sowie $f_1, \dots, f_n$. Aus Aufgabe 1 wissen wir, dass γ_i von beschränkter Variation ist. Außerdem ist klar, dass jede Funktion f_i stetig ist.
Sei $Z = \{t_0, \dots, t_r\}$ Zerlegung von $[a,b]$. Für die das Wegintegral $\int_\gamma f \cdot \mathrm{d}x$ definierenden Summen gilt dann (ξ ist Zwischenvektor zu Z):

$$\begin{aligned} S_\gamma(Z,\xi,f) &= \sum_{i=0}^{r-1} f(\gamma(\xi_i)) \cdot (\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)) \\ &= \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{k=1}^{n} f_k(\gamma(\xi_i)) \cdot (\gamma_k(t_{i+1}) - \gamma_k(t_i)) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=0}^{r-1} f_k(\gamma(\xi_i)) \cdot (\gamma_k(t_{i+1}) - \gamma_k(t_i)) \\ &= \sum_{k=0}^{n} S(Z,\xi, f_k \circ \gamma, \gamma_k), \end{aligned} \tag{$*$}$$

wobei $S(Z,\xi,f_k,\gamma_k)$ die Riemann-Stieltjes-Summen für f bzgl. γ bezeichnet. Ist nun (Z_n) eine Zerlegungsfolge mit $|Z_n| \to 0$ und $\xi^{(n)}$ ein zu Z_n gehörender Zwischenvektor, so wissen wir aus Tutorium 10, Aufgabe 2, dass die Folge $(S(Z_n, \xi^{(n)}, f_k, \gamma_k))_{n\geq 1}$ konvergiert, und dann natürlich gegen das RS-Integral

$$\int_a^b f_k(\gamma(t))\mathrm{d}\gamma_k(t).$$

(Beachte: γ_k von beschränkter Variation, γ stetig, f_k stetig $\implies$ $f_k \circ \gamma$ stetig). Aus $(*)$ folgt dann, dass auch die Folge $(S_\gamma(Z_n, \xi^{(n)}, f))_{n\geq 1}$ konvergiert, und zwar gegen

$$\sum_{k=0}^{n} \int_a^b f_k(\gamma(t))\mathrm{d}\gamma_k(t). \tag{1}$$

Folglich existiert das Wegintegral $\int_\gamma f \cdot \mathrm{d}x$, und außerdem haben wir erhalten, dass es mit (1) übereinstimmt.

Aufgabe T3

Sei $f \in \mathrm{BV}[a,b]$ im Punkt $x_0 \in (a,b)$ stetig. Dann ist auch die Funktion

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = a \\ V_a^x(f) & \text{für } x \in (a,b] \end{cases}$$

in x_0 stetig. Beweisen Sie diese Aussage, und schließen Sie mit ihrer Hilfe, dass die Weglängenfunktion s eines rektifizierbaren Weges $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig ist.

Anmerkung: Aus der ersten Aussage folgt nachstehende Präzisierung von Aufgabe 4 aus Tutorium 10:

Jede *stetige* Funktion beschränkter Variation lässt sich als Differenz zweier wachsender *stetiger* Funktionen schreiben.

Lösung:
Wir zeigen zunächst die erste Aussage. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ existiert eine Zerlegung $Z = \{x_0, x_2, x_2, \dots, x_n\}$ (x_1 fehlt noch!) des Teilintervalls $[x_0, b]$ so, dass

$$V_{x_0}^b(f) - \frac{\varepsilon}{2} < V(f,Z) \tag{1}$$

und es existiert weiter ein $\delta \in (0, x_2 - x_0)$ so, dass

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle $x \in U_\delta(x_0) \cap [a, b]$. Sei x_1 irgendein innerer Punkt von $U_\delta(x_0) \cap [x_0, b]$. Dann ist $Z' := Z \cup \{x_1\}$ eine Verfeinerung von Z, und es gilt folglich

$$V_{x_0}^b(f) - \frac{\varepsilon}{2} \overset{(1)}{<} V(f, Z) \leq V(f, Z') = |f(x_1) - f(x_0)| + \sum_{k=2}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|.$$

Da aber $|f(x_1) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ ist, folgt hieraus

$$V_{x_0}^b(f) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + V_{x_1}^b(f)$$

bzw.

$$V_{x_0}^{x_1}(f) = V_{x_0}^b(f) - V_{x_1}^b(f) \leq \varepsilon.$$

Folglich ist V in x_0 rechtsseitig stetig, und die Stetigkeit von links sieht man analog. Damit ist die erste Aussage bewiesen.
Um die Stetigkeit von s zu beweisen, wenden wir die Abschätzung (2) auf eine beliebige Zerlegung Z des Intervalls $[t, t']$ (statt $[a, b]$) an. Aus

$$L(\gamma, Z) \leq \sum_{k=1}^{n} V(\gamma_k, Z)$$

folgt dann zunächst

$$L(\gamma, Z) \leq \sum_{k=1}^{n} V_t^{t'}(\gamma_k)$$

und anschließend nach Übergang zum Supremum über alle Zerlegungen Z von $[t, t']$:

$$\text{Länge des Weges von } \gamma(t) \text{ bis } \gamma(t') = s(t') - s(t) \leq \sum_{k=1}^{n} V_t^{t'}(\gamma_k).$$

Da $V_t^{t'}(\gamma_k)$ beliebig klein gemacht werden kann, wenn nur t' hinreichend nahe bei t liegt (dies war der erste Teil dieser Aufgabe), folgt die Stetigkeit von s.