Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Nada Sissouno
Benno van den Berg

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2009/2010
27.01.2010

# 12. Tutorium zur „Analysis II“

## Riemann-Stieltjes-Integrale

**Aufgabe T1**

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, $g$ eine Funktion aus $\mathrm{BV}[a,b]$ und das RS-Integral $\int_a^b f \mathrm{d}g$ möge existieren. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\left| \int_a^b f \mathrm{d}g \right| \leq \|f\|_\infty V_a^b(g).$$

**Lösung:**

Für jede Zerlegung $Z = \{x_0, \ldots, x_n\}$ und jeden zugehörigen Zwischenvektor $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ gilt

$$\begin{aligned}
|S(Z, \xi, f, g)| &= \left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \left( g(x_k) - g(x_{k-1}) \right) \right| \\
&\leq \sum_{k=1}^n |f(\xi_k)| \cdot |g(x_k) - g(x_{k-1})| \\
&\leq \|f\|_\infty \sum_{k=1}^n |g(x_k) - g(x_{k-1})| \leq \|f\|_\infty V_a^b(g).
\end{aligned}$$

Da das RS-Integral $\int_a^b f \mathrm{d}g$ Grenzwert von RS-Summen $S(Z, \xi, f, g)$ ist, folgt die Behauptung.

**Aufgabe T2**

Zeigen Sie: ist $f$ stetig auf $[a,b]$ und $g \in \mathrm{BV}[a,b]$, so existiert das RS-Integral $\int_a^b f \mathrm{d}g$.

**Lösung:**

Sei $(Z_n)$ eine Folge von Zerlegungen von $[a,b]$ mit $|Z_n| \to 0$, und sei $\xi^{(n)}$ ein zu $Z_n$ gehörender Zwischenvektor. Zu zeigen ist, dass die Folge $(S(Z_n, \xi^{(n)}, f, g))$ für alle $f \in C[a,b]$ und $g \in \mathrm{BV}[a,b]$ konvergiert. Hierfür genügt es zu zeigen, dass $(S(Z_n, \xi^{(n)}, f, g))$ Cauchyfolge ist.

Da wir außerdem bereits wissen, dass $g$ als Differenz zweier monoton wachsender Funktionen dargestellt werden kann und da

$$\int_a^b f \ d(g_1 + g_2) = \int_a^b f \ dg_1 + \int_a^b f \ dg_2,$$

können wir annehmen, $g$ sei eine monoton wachsende Funktion (von beschränkter Variation).

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Da $f$ stetig ist auf $[a, b]$, ist $f$ dort auch gleichmäßig stetig, d.h. es gibt $\delta > 0$, so dass

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2(g(b) - g(a))} \qquad \text{falls } |x - y| < \delta.$$

(Im Fall $g(b) = g(a)$ ist $g$ konstant, und wir haben nichts zu beweisen.) Wir wählen nun $N$ so, dass $|Z_n| < \delta$ für alle $n \geq N$. Sei $m, n \geq N$ und sei $Z := Z_n \cup Z_m$ gemeinsame Verfeinerung von $Z_n$ und $Z_m$. Dann ist für jeden zu $Z$ gehörenden Zwischenvektor $\xi$:

$$|S(Z_n, \xi^{(n)}, f, g) - S(Z_m, \xi^{(m)}, f, g)| \leq |S(Z_n, \xi^{(n)}, f, g) - S(Z, \xi, f, g)| + |S(Z_m, \xi^{(m)}, f, g) - S(Z, \xi, f, g)|,$$

und wir überlegen uns, dass jeder der Summanden auf der rechten Seite $\leq \varepsilon/2$ ist.
Seien dazu etwa $I_1, \ldots, I_n$ die Teilintervalle von $Z_n$ und $\xi^{(n)} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ und seien $J_1, \ldots, J_n$ die Teilintervalle von $Z$ und $\xi = (\eta_1, \ldots, \eta_r)$. Da $Z$ eine Verfeinerung von $Z_n$ ist, erhalten wir

$$I_1 = J_1 \cup \ldots \cup J_p$$

mit einem gewissen $p$. Für jedes $\xi_1 \in I_1$ und $\eta_k \in J_k$ $(k = 1, \ldots, p)$ ist nun (wobei wir folgende Schreibweise für jedes Intervall $I = [c, d]$ benutzen: $V_I(g) := V_c^d(g) = g(d) - g(c)$):

$$\begin{aligned}\left| f(\xi_1) V_{I_1}(g) - \sum_{k=1}^{p} f(\eta_k) V_{J_k}(g) \right| &= \left| \sum_{k=1}^{p} f(\xi_1) V_{J_k}(g) - \sum_{k=1}^{p} f(\eta_k) V_{J_k}(g) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{p} |f(\xi_1) - f(\eta_k)| V_{J_k}(g) \leq \frac{\varepsilon}{2(g(b) - g(a))} V_{I_1}(g).\end{aligned}$$

Eine entsprechende Abschätzung gilt auch für die Intervalle $I_2, \ldots, I_n$, und durch Aufsummieren dieser Abschätzungen erhalten wir

$$\begin{aligned}|S(Z_n, \xi^{(n)}, f, g) - S(Z, \xi, f, g)| &\leq \frac{\varepsilon}{2(g(b) - g(a))} (V_{I_1}(g) + \ldots + V_{I_n}(g)) \\ = \frac{\varepsilon}{2(g(b) - g(a))} V_a^b(g) = \frac{\varepsilon}{2},\end{aligned}$$

wobei wir hier die Monotonie ausgenutzt haben.

**Aufgabe T3**

Sei $c \in (a, b)$, die Funktion $f$ sei stetig auf $[a, b]$ (Anmerkung: es genügt sogar Stetigkeit von $f$ in $c$), und die Funktion $g$ sei definiert durch

$$g(x) := \begin{cases} \alpha & \text{für } x \in [a, c) \\ \beta & \text{für } x = c \\ \gamma & \text{für } x \in (c, b] \end{cases}$$

mit gewissen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma$. Berechnen Sie $\int_a^b f \mathrm{d}g$.

**Lösung:**

Sei $Z = \{x_0, \ldots, x_n\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$ und $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ ein zugehöriger Zwischenvektor. Dann liegt $c$ entweder im Inneren eines der Intervalle $(x_{m-1}, x_m)$ oder fällt mit einem der Punkte $x_m$ zusammen.
Dabei gilt im ersten Fall

$$S(Z, \xi, f, g) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(g(x_k) - g(x_{k-1})) = f(\xi_m)(g(x_m) - g(x_{m-1})) = f(\xi_m)(\gamma - \alpha),$$

und um Fall $c = x_m$ ist

$$\begin{aligned} S(Z,\xi,f,g) &= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(g(x_k) - g(x_{k-1})) \\ &= f(\xi_m)(g(x_m) - g(x_{m-1})) + f(\xi_{m+1})(g(x_{m+1}) - g(x_m)) \\ &= f(\xi_m)(\beta - \alpha) + f(\xi_{m+1})(\gamma - \beta). \end{aligned}$$

Aus der Stetigkeit von $f$ in $c$ folgt in beiden Fällen

$$\int_a^b f\mathrm{d}g = f(c)(\gamma - \alpha).$$

Beachte: $\int_a^b f\mathrm{d}g$ ist unabhängig vom Wert von $\beta$. Setzen wir insbesondere $\gamma = 1$ und $\alpha = 0$, so erhalten wir $\int_a^b f\mathrm{d}g = f(c)$.

**Aufgabe T4**

Es bezeichne $[x]$ die größte ganze Zahl $\leq x$, und $f$ sei stetig auf $[0,n]$. Zeigen Sie, dass dann

$$\int_0^n f\mathrm{d}[x] = \sum_{k=1}^{n} f(k).$$

**Lösung:**

Mit der Beziehung

$$\int_a^b f\mathrm{d}(g_1 + g_2) = \int_a^b f\mathrm{d}g_1 + \int_a^b f\mathrm{d}g_2$$

können wir $\int_a^b f\mathrm{d}[x]$ in eine Summe von RS-Integralen $\int_a^b f\mathrm{d}g_i$ zerlegen, wobei jedes $g_i$ eine Treppenfunktion mit nur einer Stufe ist. Jedes der Integrale $\int_a^b f\mathrm{d}g_i$ kann man wie in Aufgabe 3 berechnen. Das Resultat ist die Beziehung

$$\int_0^n f\mathrm{d}[x] = \sum_{k=1}^{n} f(k).$$

*Anmerkung:* Jede endliche Summe kann als RS-Integral geschrieben werden!

**Aufgabe T5**

Sei

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [-1,0] \\ 1 & \text{für } x \in (0,1] \end{cases} \qquad g(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [-1,0) \\ 1 & \text{für } x \in [0,1] \end{cases}$$

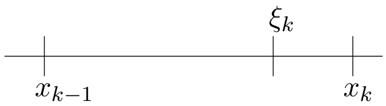
Dann existieren $\int_{-1}^0 f\mathrm{d}g$ und $\int_0^1 f\mathrm{d}g$, aber nicht $\int_{-1}^1 f\mathrm{d}g$. Zeigen Sie diese Aussage.

**Lösung:**

$$\int_{-1}^0 f\mathrm{d}g \text{ existiert, denn } f \in C[-1,0] \text{ und } g \in \mathrm{BV}[-1,0].$$
$$\int_0^1 f\mathrm{d}g \text{ existiert, denn } f \in \mathrm{BV}[0,1] \text{ und } g \in C[0,1].$$

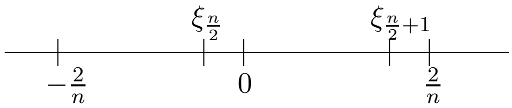
(beachte Aufgabe 2 und Anmerkung vor Satz 1 in Abschnitt 11.3 der Vorlesung).

Wir wählen als Zerlegung $Z_n$ die Unterteilung von $[-1,1]$ in $n$ gleichlange Intervalle und wählen zugehörige Zwischenvektoren $\xi^{(n)}$ so, dass die Zwischenpunkte immer im Inneren der rechten Hälfte der Intervalle $[x_{k-1}, x_k]$ liegen:



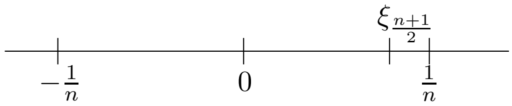

Falls $n$ gerade ist, so ist $0 \in Z_n$ (genauer: $0 = x_{n/2}$), und wir erhalten

$$\begin{aligned}
S(Z_n, \xi^{(n)}, f, g) &= \sum_{k=0}^{n} f(\xi_k)(g(x_k) - g(x_{k-1})) \\
&= f(\xi_{n/2})(g(x_{n/2}) - g(x_{n/2-1})) + f(\xi_{n/2+1})(g(x_{n/2+1}) - g(x_{n/2})) \\
&= f(\xi_{n/2})(g(0) - g(-2/n)) + f(\xi_{n/2+1})(g(2/n) - g(0)) = 0.
\end{aligned}$$




Falls $n$ ungerade ist, so sind $-\frac{1}{n}$ und $\frac{1}{n}$ die beiden zu 0 nächstgelegenen Punkte von $Z_n$ und wir bekommen:

$$\begin{aligned}
S(Z_n, \xi^{(n)}, f, g) &= \sum_{k=0}^{n} f(\xi_k)(g(x_k) - g(x_{k-1})) \\
&= f\left(\xi_{\frac{n+1}{2}}\right)\left(g\left(x_{\frac{n+1}{2}}\right) - g\left(x_{\frac{n-1}{2}}\right)\right) \\
&= f\left(\xi_{\frac{n+1}{2}}\right)\left(g\left(1/n\right) - g\left(-1/n\right)\right) = 1
\end{aligned}$$




Die Folge $(S(Z_n, \xi^{(n)}, f, g))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert also nicht, obwohl $|Z_n| = 2/n \to 0$.