Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Nada Sissouno
Benno van den Berg

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2009/2010
21.01.2010

11. Tutorium zur „Analysis II“

Riemann-Stieltjes-Integrale

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkte Funktionen, $Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$, dh. $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, und $\xi = (\xi_0, \ldots, \xi_{n-1})$ ein Zwischenvektor zu Z, dh. für jedes i sei $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$. Weiter sei $\triangle g_i := g(x_{i+1}) - g(x_i)$. Dann heißt

$$S(Z, \xi, f, g) := \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \triangle g_i$$

eine *Riemann-Stieltjes-Summe* für f. Im Fall $g(x) = x$ sind dies gerade die üblichen Riemannsummen, da dann $\triangle g_i = x_{i+1} - x_i = \triangle x_i$.

Sei (Z_n) eine Folge von Zerlegungen von $[a, b]$, und für jedes Z_n sei $\xi^{(n)}$ ein Zwischenvektor. Wenn $|Z_n| \to 0$, so heißt die Folge der Riemann-Stieltjes-Summen $(S(Z_n, \xi^{(n)}, f, g))$ eine *Riemann-Stieltjes-Folge*. Wie im Beweis von Satz 2 aus 8.3 sieht man: Falls alle Riemann-Stieltjes-Folgen von f bzgl. g konvergieren, dann gegen ein und denselben Grenzwert. In diesem Fall heißt die Funktion f *Riemann-Stieltjes-integrierbar* (kurz: RS-integrierbar) bzgl. g und der gemeinsame Grenzwert dieser Folgen heißt das *Riemann-Stieltjes-Integral* von f bzgl. g und wird mit $\int_a^b f(x)dg(x)$ oder kurz $\int_a^b f dg$ bezeichnet.

Viele Aussage für Riemann-Stieltjes-Integrale lassen sich in ähnlicher Weise wie für Riemann-Integrale beweisen. Sind z.B. f_1, f_2 RS-integrierbar bzgl. g, so ist auch $f_1 + f_2$ sowie cf_1 mit $c \in \mathbb{R}$ RS-integrierbar bzgl. g, und es gilt

$$\int_a^b (f_1 + f_2) dg = \int_a^b f_1 dg, \qquad \int_a^b (cf_1) dg = c \int_a^b f_1 dg.$$

Aufgabe T1

Überzeugen Sie sich davon, dass diese Aussagen stimmen. Zeigen Sie auch, dass folgendes gilt: Ist f bezüglich g_1 und g_2 RS-integrierbar, so ist f auch bzgl. $g_1 + g_2$ sowie bzgl. cg_1 mit $c \in \mathbb{R}$ RS-integrierbar, und es gilt:

$$\int_a^b f d(g_1 + g_2) = \int_a^b f dg_1 + \int_a^b f dg_2, \qquad \int_a^b f d(cg_1) = c \int_a^b f dg_1.$$

Lösung: Dies folgt einfach aus

$$S(Z, \xi, f, g_1 + g_2) = S(Z, \xi, f, g_1) + S(Z, \xi, f, g_2).$$

Aufgabe T2

Sei f eine stetige Funktion auf $[a,b]$ und α eine Treppenfunktion, welche auf den Intervallen $[x_i, x_{i+1})$ konstant ist, wobei $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Zeigen Sie, dass

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})).$$

Lösung: Wie für Riemann-Integrale gilt

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) d\alpha(x).$$

Für jede Zerlegung $Z = \{y_0, \ldots, y_m\}$ von $[x_{k-1}, x_k]$ und Zwischenvektor $\xi_i \in [y_i, y_{i+1}]$ gilt

$$\begin{aligned} S(Z, \xi, f, \alpha) &= \sum_{i=0}^{m-1} f(\xi_i)(\alpha(y_{i+1}) - \alpha(y_i) \\ &= f(\xi_{m-1})(\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})). \end{aligned}$$

Da f stetig ist, konvergiert $S(Z_n, \xi^{(n)}, f, \alpha) \to f(x_k)(\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1}))$ falls $|Z_n| \to 0$. Hieraus folgt die Behauptung.

Aufgabe T3

Beweisen Sie die folgende “Symmetriebeziehung”: Ist f bzgl. g RS-integrierbar, so ist g bzgl. f RS-integrierbar, und es gilt:

$$\int_a^b f dg + \int_a^b g df = fg|_a^b (= f(b)g(b) - f(a)g(a)).$$

Lösung: Ist nämlich $Z = \{x_1, \ldots, x_n\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$ und $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ ein zugehöriges Zwischenvektor (dh. $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$), und setzen wir $\xi_0 := a$, $\xi_{n+1} := b$, so gilt (wie man leicht nachrechnet)

$$\sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)(f(x_k) - f(x_{k-1})) = -\sum_{k=0}^{n} f(\xi_k)(g(\xi_{k+1}) - g(\xi_k)) + f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Hieraus folgt die Behauptung (Z und ξ vertauschen ihre Rollen).

Aufgabe T4

Beweisen Sie den folgenden Satz: Ist f Riemann-integrierbar, g differenzierbar und g' Riemann-integrierbar, so ist f bzgl. g RS-integrierbar, und es gilt:

$$\int_a^b f dg = \int_a^b f g' dx.$$

Hinweis: Sei $Z = \{x_0, \ldots, x_n\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$ und sei $\xi = (\xi_0, \ldots, \xi_{n-1})$ ein zugehöriger Zwischenvektor. Wählen Sie nach dem Mittelwertssatz der Differentialrechnung einen weiteren Zwischenvektor $\eta = (\eta_0, \ldots, \eta_{n-1})$ so, dass

$$g(x_{i+1}) - g(x_i) = g'(\eta_i)(x_{i+1} - x_i)$$

und finden Sie eine gute Abschätzung für $|S(Z, \xi, f, g) - S(Z, \eta, fg')|$.

Lösung: Sei $Z = \{x_0, \ldots, x_n\}$ Zerlegung von $[a, b]$, $\xi = (\xi_0, \ldots, \xi_{n-1})$ zugehöriger Zwischenvektor. Wählen wir nach MWS der Differentialrechnung einen weiteren Zwischenvektor $\eta = (\eta_0, \ldots, \eta_{n-1})$ so, dass

$$g(x_{i+1}) - g(x_i) = g'(\eta_i)(x_{i+1} - x_i).$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(g(x_{i+1}) - g(x_i)) &= \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) g'(\eta_i)(x_{i+1} - x_i) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (f(\xi_i) - f(\eta_i)) g'(\eta_i)(x_{i+1} - x_i) + \sum_{i=0}^{n-1} f(\eta_i) g'(\eta_i)(x_{i+1} - x_i).
\end{aligned}$$

Die linke Seite ist $S(Z, \xi, f, g)$, und der letzte Summand ist $S(Z, \eta, fg')$. Also:

$$\begin{aligned}
|S(Z, \xi, f, g) - S(Z, \eta, fg')| &\leq \sum_{i=0}^{n-1} |f(\xi_i) - f(\eta_i)||g'(\eta_i)|(x_{i+1} - x_i) \\
&\leq \|g'\|_\infty \sum_{i=0}^{n-1} |f(\xi_i) - f(\eta_i)|(x_{i+1} - x_i) \\
&\leq \|g'\|_\infty \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) \\
&\leq \|g'\|_\infty (O(Z, f) - U(Z, f)).
\end{aligned}$$

Ersetzen wir in dieser Abschätzung Z durch die Glieder einer Zerlegungsfolge (Z_n) mit $Z_n \to 0$, so konvergiert $(O(Z_n, f) - U(Z_n, f)) \to 0$ und $S(Z_n, \eta, fg') \to \int_a^b fg' dx$ auch jede Folge $(S(Z_n, \xi_n, f, g))$ und zwar gegen $\int_a^b fg' dx$. Hieraus folgt die Behauptung.