Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Nada Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/2010
14.01.2010

# 10. Tutorium zur „Analysis II“

## Funktionen von beschränkter Variation

Eine Funktion $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt *von beschränkter Variation*, wenn es eine Konstante $M > 0$ gibt, so dass für jede Zerlegung $Z = \{z_0, \dots, z_n\}$ von $[a,b]$ gilt

$$V(g,Z) := \sum_{k=1}^{n} |g(z_k) - g(z_{k-1})| \le M.$$

Ist $g$ von beschränkter Variation, so heißt die Zahl

$$V_a^b(g) := \sup_z V(g,Z)$$

die Totalvariation von $g$ auf $[a,b]$. Die Menge aller Funktionen beschränkter Variation auf $[a,b]$ bezeichnen wir mit $\mathrm{BV}[a,b]$.

**Aufgabe T1**

eigen Sie: jede Treppenfunktion, jede monotone Funktion, jede Lipschitz-stetige Funktion auf $[a,b]$ gehört zu $\mathrm{BV}[a,b]$.

**Lösung:** *Treppenfunktionen liegen in* BV*:*
Treppenfunktionen haben folgende Gestalt: es gibt Punkte $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_m = b$ und Zahlen $c_0, c_1, \dots, c_{m-1}$ so, dass

$$f(x) = \begin{cases} c_0 & \text{auf } [a_0, a_1] \\ c_i & \text{auf } (a_i, a_{i+1}] \text{ für } i = 1, \dots, m. \end{cases}$$

Ist nun $Z = \{z_0, \dots, z_n\}$ beliebige Zerlegung von $[a,b]$, so ist klar: liegen $z_{k-1}, z_k$ im gleichen Intervall $[a_0, a_1]$ bzw. $(a_i, a_{i+1}]$, so ist der Summand $|f(z_k) - f(z_{k-1})|$ von $V(f,Z)$ gleich 0. Hieraus folgt leicht, dass

$$V(f,Z) \le \sum_{i=1}^{m} |c_i - c_{i-1}|.$$

Daher ist $f \in \mathrm{BV}$. Wählt man $z_0 = a$, $z_{m+1} = b$ und für $z_i$ gerade den Mittelpunkt des Intervalles $[a_{i-1}, a_i]$m so ist für diese spezielle Zerlegung offenbar

$$V(f,Z) = \sum_{i=1}^{m} |c_i - c_{i-1}|,$$

so dass wir noch
$$V_a^b(f) = \sum_{i=1}^{m} |c_i - c_{i-1}|$$
erhalten.
*Monotone Funktionen sind in* BV*:*
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ etwa monoton wachsend (d.h. $f(s) \leq f(t)$ für $s \leq t$), und sei $Z = \{z_0, \ldots, z_n\}$ Zerlegung von $[a,b]$. Dann ist

$$V(f,Z) = \sum_{k=1}^{n} |f(z_k) - f(z_{k-1})| = \sum +k = 1^n (f(z_k) - f(z_{k-1})) = f(b) - f(a).$$

Hieraus folgt:
$$f \in \mathrm{BV}[a,b] \qquad \text{und} \qquad V_a^b(f) = f(b) - f(a).$$
*Lipschitzstetige Funktionen sind in* BV*:*
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Lipschitzstetig, d.h. $\exists\, L > 0 \ : \ |f(s) - f(t)| \leq L|s-t| \ \forall s,t$, udn sei $Z = \{z_0, \ldots, z_n\}$ Zerlegung von $[a,b]$. Dann ist

$$V(f,Z) = \sum_{k=1}^{n} |f(z_k) - f(z_{k-1})| \leq L \sum_{k=1}^{n} |z_k - z_{k-1}| = L(b-a).$$

Also ist
$$f \in \mathrm{BV}[a,b] \qquad \text{und} \qquad V_a^b(f) \leq L(b-a).$$

**Aufgabe T2**

st jede stetige Funktion von beschränkter Variation?

**Lösung:** Um zu sehen, dass nicht alle stetigen Funktionen von beschränkter Variation sind, genügt die Angabe eines Beispiels. Sei

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x\cos(\pi x) & x > 0. \end{cases}$$

Diese Funktion ist auf $[0,1]$ stetig (warum?). Für die spezielle Zerlegung $Z = Z_n = \{0, \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}, \ldots, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\}$ von $[0,1]$ erhalten wir

$$\begin{aligned} V(f,Z) &= \sum |f(z_k) - f(z_{k-1})| \\ &= \frac{1}{2n}\cos(2n\pi) + \sum_{i=1}^{2n-1} \left| \frac{1}{i}\cos(i\pi) - \frac{1}{i+1}\cos((i+1)\pi) \right| \\ &= \frac{1}{2n} = \sum_{i=1}^{2n-1} \left| \frac{1}{i}(-1)^i - \frac{1}{i+1}(-1)^{i+1} \right| \\ &= \frac{1}{2n} + \sum_{i=1}^{2n-1} \left( \frac{1}{i} + \frac{1}{i+1} \right) \\ &= 2\sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{i} - 1, \end{aligned}$$

und da die harmonische Reihe divergiert, wächst $V(f,Z) = V(f,Z_n)$ für $n \to \infty$ über alle Grenzen.

Ist $g$ von beschränkter Variation auf $[a, b]$ und $[c, d] \subset [a, b]$, so ist $g$ auch von beschränkter Variation Variation auf $[c, d]$ und
$$V_c^d(g) \leq V_a^b(g).$$
Zeigen Sie folgende "Umkehrung"dieser Aussage:

**Aufgabe T3**

ei $a < c < b$ und $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei auf $[a, c]$ und $[c, b]$ von beschränkter Variation. Dann ist $g \in \mathrm{BV}[a, b]$ und es gilt
$$V_a^b(g) = V_a^c(g) + V_c^b(g).$$

**Lösung:** Wir zeigen zuerst, dass $g \in \mathrm{BV}[a, b]$. Sei $Z$ eine Zerlegung von $[a, b]$ und $Z' := Z \cup \{c\}$, $Z_1 := Z' \cap [a, c]$, $Z_2 := Z' \cap [c, b]$. Dann sind $Z_1$ bzw. $Z_2$ Zerlegungen von $[a, c]$ bzw. $[c, b]$, und wir erhalten
$$V(g, Z) \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} V(g, Z') \overset{\text{Def.}}{=} V(g, Z_1) + V(g, Z_2) \overset{\text{Voraussetzung}}{\leq} V_a^c(g) + V_c^b(g).$$
Dies gilt für jedes $Z$, also ist $g \in \mathrm{BV}[a, b]$, und außerdem gilt
$$V_a^b(g) \leq V_a^c(g) + V_c^b(g). \tag{1}$$
Wir zeigen nun noch, dass in dieser Beziehung sogar Gleichheit gilt.
Für jedes $\varepsilon > 0$ findet man Zerlegungen $Z_1$ von $[a, c]$ bzw. $Z_2$ von $[c, b]$ so, dass
$$V(g, Z_1) \geq V_a^c(g) - \frac{\varepsilon}{2}, \qquad V(g, Z_2) \geq V_c^b(g) - \frac{\varepsilon}{2}.$$
Für die Zerlegung $Z := Z_1 \cup Z_2$ von $[a, b]$ ist dann
$$V(g, Z) = V(g, Z_1) + V(g, Z_2) \geq V_a^c(g) + V_c^b(g) - \varepsilon,$$
und damit erst Recht
$$V_a^b(g) \geq V_a^c(g) + V_c^b(g) - \varepsilon$$
Da dies für alle $\varepsilon > 0$ gilt, folgt
$$V_a^b(g) \geq V_a^c(g) + V_c^b(g).$$
Zusammen mit (1) ist dies die Behauptung.

**Aufgabe T4**

eigen Sie: Eine Funktion $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann von beschränkter Variation, wenn sie als Differenz zweier wachsender Funktionen dargestellt werden kann.
*Hinweis:* Betrachten Sie auf $[a, b]$ die Funktion $f(x) := V_a^x(g)$.

**Lösung:** *1. Schritt:* Wir zeigen, dass falls $g \in \mathrm{BV}[a, b]$ liegt, dann ist $g$ Differenz zweier monoton wachsender Funktionen.
Wir definieren eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ durch
$$f(x) := \begin{cases} 0 & x = a \\ V_a^x(g) & x \in (a, b]. \end{cases}$$
Sei $a \leq x < y \leq b$. Dann ist nach Aufgabe 3:
$$f(y) = V_a^y(g) = V_a^x(g) + V_x^y(g) \geq V_a^x(g) = f(x),$$

d.h. $f$ wächst monoton. Auch die Funktion $h := f - g$ wächst monoton: sind wieder $x, y$ wie oben, so ist

$$h(y) - h(x) = f(y) - f(x) - (g(y) - g(x)) = V_x^y(g) - (g(y) - g(x)),$$

und dies ist $\geq 0$, denn für jede Zerlegung von $[x, y]$ ist

$$|g(y) - g(x)| \leq \sum_{i=1}^{n} |g(z_i) - g(z_{i-1})| \leq V_x^y(g).$$

Also sind sowohl $f$ als auch $h$ monoton wachsend, und aus $g = f - h$ folgt die Behauptung.
*2. Schritt:* Wir zeigen, dass die Differenz zweier monoton wachsender Funktionen in $\mathrm{BV}[a, b]$ liegt. Aus Aufgabe 1 wissen wir, dass jede monoton wachsende Funktion in BV liegt. Um die Behauptung zu zeigen, genügt es daher, die folgende Aussage zu zeigen:
Ist $f, g \in \mathrm{BV}[a, b]$, so ist auch $f + g \in \mathrm{BV}[a, b]$.
Sei dazu $Z$ beliebige Zerlegung von $[a, b]$. Dann ist

$$\begin{aligned}
V(f+g, Z) &= \sum_{k=1}^{n} |(f+g)(z_k) - (f+g)(z_{k-1})| \\
&= \sum_{k=1}^{n} |f(z_k) - f(z_{k-1}) + g(z_k) - g(z_{k-1})| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} |f(z_k) - f(z_{k-1})| + \sum_{k=1}^{n} |g(z_k) - g(z_{k-1})| \\
&= V(f, Z) + V(g, Z) \leq V_a^b(f) + V_a^b(g).
\end{aligned}$$

Hieraus folgt $f + g \in \mathrm{BV}[a, b]$ und außerdem

$$V_a^b(f+g) \leq V_a^b(f) + V_a^b(g).$$

*Zusatzfrage:* Ist $\|f\| := V_a^b(f)$ eine Norm auf $\mathrm{BV}[a, b]$?
Da monoton wachsende Funktionen nur abzählbar viele Unstetigkeitsstellen aufweisen kp̈onnen, folgt aus dieser Aufgabe und dem Lebesgueschen Integrabilitätskriterium, dass Funktionen von beschränkter Variation Riemannintegrierbar sind.