TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

4. Übung zu Distributionen

30. Beweise, dass $L^p(\Omega)$, $C^k(\Omega)$, $\mathscr{E}(\Omega)$, $\mathscr{D}(\Omega)$ alle Unterräume von $L^1_{loc}(\Omega)$ sind. Zeige, dass

$$\mathscr{D}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

und

$$\mathscr{D}(\Omega) \hookrightarrow \mathscr{E}(\Omega),$$

jeweils mit stetigen Einbettungen.

31. Beweise die folgenden Aussagen:

a) Ist $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ so ist $\partial^\alpha : \mathscr{E}(\Omega) \to \mathscr{E}(\Omega)$ stetig.
b) $\partial^\alpha : \mathrm{C}_\mathrm{c}^\infty(K) \to \mathrm{C}_\mathrm{c}^\infty(K)$ ist (linear und) stetig für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ und $K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt.
c) Ist $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ so ist $\partial^\alpha : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathscr{D}(\Omega)$ stetig (und linear).
d) $\tau_x : \mathscr{E}(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{E}(\mathbb{R}^d)$ ist stetig, und ebenso die Spiegelung.
e) $\tau_x : \mathscr{D}(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ ist stetig, und ebenso die Spiegelung.

32. Ist X ein lokalonvexer Raum und $T : X \to Y$ linear und stetig, so definiert für jedes lineare Funktional $y^* : Y \to \mathbb{C}$ die Formel $y^* \circ T$ ein stetiges lineares Funktional auf X. Die Abbildung $y^* \mapsto y^* \circ T$ ist linear (und heißt die Adjungierte von T, bezeichnet durch T^*). Beweise diese Aussagen! Bestimme die Adjungierten der Operatoren in Aufgaben 31.c) und 31.e).

33. Beweise: Ist $f \in \mathrm{C}^1(\Omega)$, so gilt für jedes $j = 1, \ldots, d$ die Gleichheit $\partial_j T_f = T_{\partial f}$.

34. Sei $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Beweise, dass für $i, j = 1, \ldots, d$ die Gleichheit $\partial_j \partial_i T = \partial_i \partial_j T$ gilt (eine Tatsache die für klassischen Ableitungen nicht immer stimmt)!

35. **(Leibniz-Formel)** Sei $f \in C^\infty(\Omega)$ und $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Zeige, dass für $j = 1, \ldots, d$

$$\partial_j(fT) = \partial_j f \cdot T + f \cdot \partial_j T$$

gilt. Allgemeiner beweise, dass für $\alpha \ni \mathbb{N}_0^d$ gilt:

$$\partial^\alpha(fT) = \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta f \cdot \partial^{\alpha-\beta} T,$$

wobei $\binom{\alpha}{\beta} := \binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdot \binom{\alpha_2}{\beta_2} \cdots \binom{\alpha_d}{\beta_d}$, und wobei "$\beta \le \alpha$" bedeutet: $\beta_j \le \alpha_j$ für alle $j = 1, \ldots, d$.

36.

a) Bestimme $\mathrm{id} \cdot \delta'$
b) Beweise: $\mathrm{id} \cdot \mathrm{pv}\text{–}\frac{1}{x} = T_{\mathbf{1}}$, wobei $\mathbf{1}$ =Konstante 1 Funktion.
c) Bestimme $\mathrm{id} \cdot \mu_\varepsilon$.
d) Bestimme die Ableitung von T_H, wobei $H(x)$ =die Heaviside-Funktion.
e) Bestimme die k-te Ableitung von δ.
f) Sei $f(x) = \log|x| \cdot \mathrm{sign}(x)$. Bestimme die Ableitung von T_f.
g) Sei $f(x) = |x|$. Bestimme die Ableitung von T_f.

37. Beweise, dass δ', μ_ε, $\mathrm{pv}\text{–}\frac{1}{x}$ keine reguläre Distributionen sind!

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

38. Betrachte $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$, und sei $\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Identität. Zeige, dass $\mathrm{id} \cdot T = 0$ impliziert, dass für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ die Gleichheit $T = \lambda \cdot \delta$ gilt.
Hinweise:
a) Sei $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Zeige, dass $\varphi(x) = \varphi(0) + x \int_0^1 \varphi'(tx)\mathrm{d}t$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$.
b) Zeige, dass es gibt ein $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ mit $\psi = 1$ auf einer Umgebung von 0, so dass für jede Testfunktion φ die Gleichheit $\varphi = \varphi(0)\psi + \mathrm{id} \cdot \eta$ mit einer geeigneten Wahl von $\eta \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ gilt.

39. Sei $A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ linear. Definiere $M : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathscr{D}(\Omega)$ durch $M\varphi = \varphi \circ A$. Zeige, dass M stetig ist. Was ist $M^*\delta$? Was ist $\partial_j(\tau_a M^*\delta)$?

†**40.** Sei $T \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ mit $\mathrm{id}^n \cdot T = 0$. Beweise, dass T is Linearkombination von $\delta, \ldots, \delta^{(n-1)}$.

41. Versuche es zu begründen warum $\delta \cdot \delta$ nicht (als Distribution) definiert werden kann!